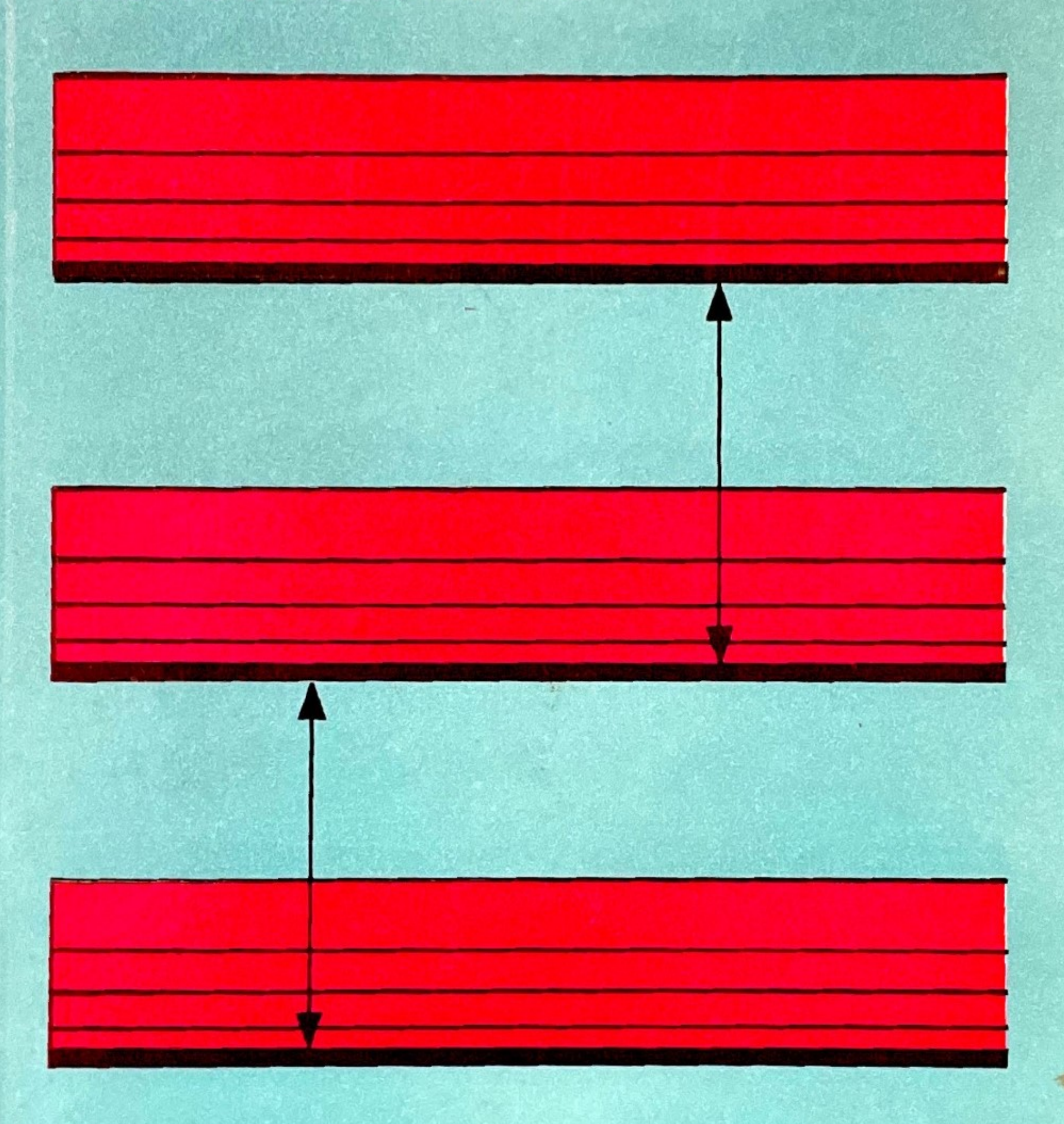
Elektrik · Optik Quantentheorie

HAJKO / SCHILLING



PHYSIK IN BEISPIELEN

Physik
in Beispielen

Elektrik –
Optik – Quantentheorie

Physik in Beispielen

Elektrik – Optik – Quantentheorie

von Prof. Dr. rer. nat. VLADIMIR HAJKO, Košice
ergänzt von
Prof. Dr. rer. nat. habil. HEINZ SCHILLING, Berlin

Mit 253 durchgerechneten Beispielen
und 364 Aufgaben mit Lösungen

1977
VERLAG HARRI DEUTSCH
THUN UND FRANKFURT/MAIN

Dieser Band entspricht den Abschnitten 3. bis 7. des Buches
Hajko: Physik in Beispielen
Titel des slowakischen Originals: Fizika V Prikladoch, Alfa-Verlag Bratislava/ČSSR 1962
Deutschsprachige Ausgabe nach der 2. Auflage des slowakischen Originals,
ergänzt von Prof. Dr. rer. nat. habil. HEINZ SCHILLING, AdW Berlin,
durch Abschnitte zu den Themen Relativitätstheorie und Quantentheorie
Übersetzer: Dipl.-Slawist ERWIN WEISS KUKA, Leipzig
Wissenschaftlicher Bearbeiter: Prof. Dr. phil. habil. GERHARD POPPEI, IHS Wismar

ISBN 3 87144 228 3

Lizenzausgabe für den Verlag Harri Deutsch, Thun
Printed in GDR
Satz und Druck: INTERDRUCK Grafischer Großbetrieb — Leipzig III/18/97
Redaktionsschluß: 15. 8. 1976

Vorwort

Aus dem Vorwort des slowakischen Originals

Im vorliegenden Buch wird an Hand von gelösten Beispielen und Aufgaben mit Resultatangabe die Anwendung von Gesetzen und Rechenmethoden aus denjenigen Bereichen der Physik erläutert, die den wesentlichen Inhalt der Kursvorlesung „Experimentalphysik" an Technischen Hochschulen ausmachen. Obwohl das Buch in erster Linie als Lehrmittel für Studierende technischer Disziplinen gedacht ist, wird es aber auch den an naturwissenschaftlichen Fakultäten immatrikulierten Hörern der ersten Studienjahre gute Dienste leisten. Es soll zur Verringerung der Schwierigkeiten beitragen, denen die Studierenden bekanntermaßen bei der Anwendung physikalischer Gesetze auf konkrete Beispiele begegnen.
Den einzelnen, in sich geschlossenen Teilen vorangestellt, faßten wir jeweils in Form einer Einleitung die Definitionen der physikalischen Größen, Gesetze und Lehrsätze zusammen, die sich auf den Lehrstoff des zugeordneten Teils beziehen, um dem Leser bei der Bearbeitung der Beispiele die Möglichkeit zu geben, den Inhalt der erforderlichen Größen und Beziehungen unmittelbar zu rekapitulieren, ohne dabei andere Bücher konsultieren zu müssen. Dennoch besteht wohl kein Zweifel daran, daß vor der Lektüre dieses Werkes oder parallel dazu das Studium eines Lehrbuchs der Physik erfolgen muß.

Vorwort der deutschsprachigen Ausgabe

Die Physik ist eine der wichtigsten Grundwissenschaften für die Ausbildung und Arbeit des Ingenieurs. Als eine für die moderne Technik wesensbestimmende Naturwissenschaft durchläuft sie – zusammen mit der von ihr erfaßten und durchsetzten Technik – einen tiefgreifenden und komplizierten Entwicklungsprozeß. Der Ingenieur

in erster Linie – aber auch der Naturwissenschaftler, der aus der Praxis erwachsende Probleme mit spezifisch physikalischen Mitteln und Methoden in Angriff nimmt, benötigt in hohem Maße die Fähigkeit, allgemeine Erkenntnisse und Prinzipien von Fall zu Fall auf ganz konkrete Sachverhalte anwenden zu können. Erfahrungsgemäß aber bereitet gerade diese Aufgabe dem Studierenden und nicht minder dem jungen Absolventen technischer und naturwissenschaftlicher Fakultäten besondere Schwierigkeiten, während die allgemeinen Prinzipien an sich, in ihrer naturgesetzlich fixierten Allgemeingültigkeit, durchweg zum lückenlos reproduzierbaren Wissensinhalt gehören.

Die vorliegende Sammlung von Beispielen und Aufgaben erscheint geeignet, wesentlich zur Behebung dieser Schwierigkeit, allgemeine Prinzipien konkret anwenden zu können, beizutragen. Vom Studierenden in Verbindung mit einem Lehrbuch und der Vorlesung benutzt, sollen die Bücher „Physik in Beispielen" Mittler und Wegweiser zwischen den „reinen Höhen" der Theorie und den mühsam, aber unumgänglich notwendig zu beherrschenden Ebenen der wissenschaftlichen Praxis sein.

Der deutschsprachigen Ausgabe liegt die 2. Auflage des slowakischen Originals zugrunde. Entsprechend den IUPAP-Regeln wurden gegenüber dem Original Änderungen der Größen und Einheiten vorgenommen. Für die neue Ausgabe wurden alle Rechnungen weitestgehend auf SI-Einheiten umgestellt, deren umfassende Anwendung sich mehr und mehr durchsetzt. Als SI-fremde Einheit wurde nur das in der Atomphysik zulässige Elektronvolt beibehalten. Die zu den einzelnen Aufgaben angegebenen Resultate entsprechen von Fall zu Fall den mit Schul-Logarithmentafeln oder Rechenstab erzielbaren Genauigkeitsansprüchen. Lediglich einige Beispiele und Aufgaben der Abschnitte 4. und 5. erfordern die Benutzung von genaueren Logarithmentafeln oder Rechenmaschinen.

In Anlehnung an die im Original vorgegebene Dreiteilung im Aufbau – theoretische Grundlage, Beispiele, Aufgaben – wurde das Werk durch Beiträge zu den Gebieten Quantentheorie und Relativitätstheorie ergänzt, die von Herrn Prof. Dr. Heinz Schilling verfaßt wurden.

Einem vielfach geäußerten Wunsch entsprechend, wurde die bisherige einbändige Ausgabe in zwei selbständige Teile zerlegt. Der Band „Elektrik – Optik – Quantentheorie" enthält die Abschnitte 3. bis 7. der früheren Fassung. Die vorhergehenden Abschnitte erscheinen unter dem Titel „Mechanik und Wärmelehre" unabhängig von diesem Buch in einem weiteren Band.

Bearbeiter und Verlag

Inhaltsverzeichnis

1. *Elektrische und magnetische Vorgänge*

1.1. Elektrostatik

Gemäß dem **Coulombschen Gesetz** wirkt eine Punktladung Q_1 auf eine Punktladung Q_2 mit der Kraft

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r}_{1,2};$$

$\vec{r}_{1,2}$ ist der Ortsvektor der Ladung Q_2 bezüglich Q_1, r der Abstand zwischen beiden Ladungen und ε die **Dielektrizitätskonstante** des Mittels, in dem sich die Ladungen befinden. Man kann ε in der Form $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ausdrücken, wobei $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}m^{-1}}$ als **elektrische Feldkonstante** (bisher auch Influenzkonstante genannt) und ε_r als **Dielektrizitätszahl** bezeichnet wird. Für das Vakuum gilt $\varepsilon_r = 1$.
Unter der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ in einem beliebigen Punkt des Feldes verstehen wir den Quotienten der Kraft $\vec{F}$, die im gegebenen Punkt auf irgendeine Ladung Q' wirkt, und der Ladung selbst. In der Umgebung einer Punktladung ist

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{r^3} \vec{r};$$

$\vec{r}$ ist der Ortsvektor des Punktes, in dem die Feldstärke in bezug auf den Punkt herrscht, der die Ladung enthält. In der Umgebung einer größeren Zahl von Punktladungen $Q_1, Q_2, \ldots$ herrscht eine Feldstärke, die wir nach der Beziehung

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \sum \frac{Q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

berechnen, d. h. als die Vektorsumme der elektrostatischen Feldstärken, die im gegebenen Punkt die einzelnen Ladungen jeweils selbst für sich erzeugen würden.

Im Falle, daß die Ladung innerhalb eines bestimmten Volumens kontinuierlich verteilt ist, kann die Stärke des elektrostatischen Feldes in der Umgebung durch

$$\vec{E} = \int \frac{\varrho \, d\tau}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^3} \vec{r}$$

angegeben werden, in der ϱ die Volumendichte der Ladung, $d\tau$ das Volumenelement und $\vec{r}$ den Ortsvektor desjenigen Punktes bedeutet, in dem $\vec{E}$, bezogen auf das betrachtete Volumenelement, gemessen werden soll. Dabei erfaßt die Integration das gesamte Volumen, in dem sich die elektrische Ladung befindet.
Wenn die elektrische Ladung auf der Oberfläche eines leitenden Körpers mit einer Flächendichte σ verteilt ist, dann ist die Stärke des von dieser Ladung erzeugten elektrischen Feldes durch

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\sigma \, dA}{r^3} \vec{r}$$

gegeben, in der dA das Flächenelement der Leiteroberfläche und $\vec{r}$ der Ortsvektor des Punktes, in dem die Feldstärke $\vec{E}$ herrscht, bezüglich des Flächenelements dA ist.
Die **Arbeit**, welche die Kräfte des elektrischen Feldes verrichten, wenn in ihm eine Ladung Q' von einem Punkt 1 zu einem anderen Punkt 2 verschoben wird, ist durch die Beziehung

$$W = W_1 - W_2$$

angegeben, in der W_1 bzw. W_2 die **potentielle Energie** der Ladung Q' in den Punkten 1 bzw. 2 darstellt. Im Falle, daß es sich um die Verschiebung einer Ladung Q' handelt, die in einem Feld erfolgt, das von einer Punktladung Q herrührt, ist

$$W = W_1 - W_2 = \frac{QQ'}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

r_1 und r_2 kennzeichnen den Anfangs- bzw. Endpunkt der von der Ladung Q' zurückgelegten Wegstrecke, bezogen auf den Ort der Ladung Q.
Die potentielle Energie einer Ladung Q' im elektrischen Feld einer Ladung Q wird auf unendliche Entfernung bezogen und beträgt

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{QQ'}{r},$$

(r Abstand zwischen den Ladungen Q und Q').
In einem bestimmten Punkt des Feldes ist das **Potential** des elektrostatischen Feldes durch den Quotienten aus der potentiellen Energie einer Versuchsladung und dieser

Ladung Q' selbst definiert, d. h.,

$$U = \frac{W}{Q'}.$$

Wenn es sich um das elektrostatische Potential einer Punktladung Q handelt und wenn potentielle Energie und also auch das Potential selbst auf Unendlich bezogen wird (sog. *absolutes Potential*), dann kann auch geschrieben werden

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r}$$

(r Abstand des Punktes, in dem das Potential bestimmt wird, von der Ladung Q). Wenn das elektrostatische Feld durch eine größere Anzahl von Ladungen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ erzeugt wird, so gilt für das absolute Potential in einem bestimmten Punkt des Feldes:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum \frac{Q_i}{r_i}$$

(r_i Abstand des Punktes, in dem das Potential bestimmt wird, von der Ladung Q_i). Wenn die die Quelle des elektrostatischen Feldes bildende Ladung in einem bestimmten Volumen mit der Volumendichte ϱ bzw. auf einer bestimmten Oberfläche mit der Flächendichte σ kontinuierlich verteilt ist, können wir für das absolute Potential in einem bestimmten Punkt des elektrostatischen Feldes schreiben

$$U = \int \frac{\varrho \, \mathrm{d}\tau}{4\pi\varepsilon r}$$

bzw.

$$U = \int \frac{\sigma \, \mathrm{d}A}{4\pi\varepsilon r}.$$

Die Gesamtheit aller Punkte, die im elektrischen Feld durch das gleiche Potential ausgezeichnet sind, liegt auf einer Fläche, die wir als **Äquipotentialfläche** bezeichnen. Für den Zusammenhang zwischen Potential und Feldstärke gilt im elektrostatischen Feld die Beziehung

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Da weiterhin

$$\mathrm{d}U = \operatorname{grad} U \, \mathrm{d}\vec{r} = -E \, \mathrm{d}\vec{r}$$

ist, kann man das Potential in einem Punkt des Feldes mit dem Ortsvektor $\vec{r}$, in dem die Feldstärke den Wert $\vec{E}$ hat, in bezug auf einen Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{r}_0$ gemäß

folgender Beziehung ausdrücken:

$$U = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}.$$

Unter dem elektrischen **Kraftfluß** Ψ eines elektrostatischen Feldes der Stärke $\vec{E}$ durch eine in sich geschlossene Fläche der Größe A verstehen wir den Ansatz

$$\Psi = \int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A},$$

wobei $\mathrm{d}\vec{A}$ den Normalenvektor des zugehörigen Flächenelements $\mathrm{d}A$ bedeutet. Gemäß dem **Lehrsatz von Gauß-Ostrogradski** ist der Kraftfluß Ψ eines elektrostatischen Feldes durch eine geschlossene Fläche gleich dem Quotienten aus der im Innern der Fläche enthaltenen Elektrizitätsmenge Q und der Dielektrizitätskonstante ε des Mediums, in dem das Feld erzeugt wurde, d. h.,

$$\Psi = \frac{Q}{\varepsilon}.$$

Die Stärke eines elektrostatischen Feldes in der Nähe der Oberfläche eines Leiters können wir gemäß dem **Coulombschen Gesetz** als Quotient aus der Flächendichte σ der Ladung im gegebenen Punkt der Leiteroberfläche und der Dielektrizitätskonstante ε des den Leiter umgebenden Mediums bestimmen zu

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

Die Gültigkeit des COULOMBschen Gesetzes kann man mit Hilfe des Lehrsatzes von GAUSS-OSTROGRADSKI nachweisen. Mit seiner Hilfe läßt sich weiterhin zeigen, daß das elektrostatische Feld in der Umgebung einer Ladung, die das Volumen einer Kugel homogen ausfüllt, genau das gleiche ist wie in der Umgebung einer elektrischen Punktladung gleicher Stärke, die in ihrem Mittelpunkt liegt. Analog verhält es sich mit dem elektrostatischen Feld in der Umgebung eines Kugelleiters, dessen Ladung sich gleichmäßig über seine Oberfläche verteilt.

Die **Verschiebungsdichte** $\vec{D}$ hängt mit der Stärke des elektrostatischen Feldes $\vec{E}$ durch die Beziehung

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = (\varepsilon_0 + \varkappa)\,\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

zusammen, in der $\varkappa$ die **elektrische Suszeptibilität** bedeutet.

Unter der **elektrischen Kapazität** C eines einzelnen Leiters verstehen wir den Quotienten

aus der Gesamtladung Q und dem Potential U des Leiters, also

$$C = \frac{Q}{U}.$$

Die **Kapazität eines Kondensators** wird durch die Beziehung

$$C = \frac{Q}{U}$$

definiert, worin Q die Ladung auf einer Elektrode des Kondensators und U das Potential dieser Elektrode bezüglich der anderen Elektrode des Kondensators darstellt. Bei der *Parallelschaltung* von Kondensatoren der Kapazitäten C_1, C_2, ..., C_n finden wir die resultierende Kapazität C als Summe der Kapazitäten, d. h.,

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

Für die resultierende Kapazität C einer Batterie *in Serie* geschalteter Kondensatoren gilt die Beziehung

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i},$$

d. h.,

$$C = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}.$$

Die **Energie eines elektrischen Feldes,** das durch einen geladenen Leiter erzeugt wird oder das sich zwischen den Elektroden eines Kondensators befindet, ist gegeben durch

$$W = \frac{1}{2} C U^2$$

(C absolute Kapazität des Leiters bzw. Kondensators, U das absolute Potential des Leiters bzw. das Potential einer Kondensatorplatte bezüglich einer anderen).
Unter der **Energiedichte** in einem elektrostatischen Feld verstehen wir die Energie, die auf eine Volumeneinheit des Mediums, in dem das Feld besteht, entfällt. Für einen aus zwei Platten der Größe A bestehenden Plattenkondensator, dessen Platten voneinander den Abstand d haben, gilt

$$\varrho_e = \frac{W}{Ad} = \frac{\varepsilon E^2}{2}.$$

Es läßt sich nachweisen, daß dieser Ausdruck für die Dichte der elektrostatischen Feldenergie nicht nur für das homogene Feld, sondern auch für jedes andere inhomogene Feld gilt.

B Beispiele

1. Zwei gleich große Kügelchen tragen die elektrischen Ladungen $Q_1 = 24 \cdot 10^{-6}$ C und $Q_2 = -18 \cdot 10^{-6}$ C.
a) Mit welcher Kraft ziehen sich die beiden Kugeln bei 6 cm Abstand im Vakuum an?
b) Mit welcher Kraft würden sie sich bei gleichem Abstand abstoßen, wenn sie vorher miteinander in Berührung gebracht worden wären?

Lösung

a) Entsprechend dem COULOMBschen Gesetz können wir schreiben

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{24 \cdot 10^{-6}\,\text{C} \cdot 18 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\text{As}\,\text{V}^{-1}\,\text{m}^{-1}\,0{,}06^2\,\text{m}^2} =$$

$$= \frac{2{,}4 \cdot 1{,}8 \cdot 10^5}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 3{,}6}\,\text{VAs}\,\text{m}^{-1} = \underline{1{,}078 \cdot 10^3\,\text{N}}.$$

b) Bei der Berührung würden sich die beiden Ladungen ausgleichen, so daß die auf beide Kugeln entfallende Gesamtladung sich zu

$$Q_{1,2} = 24 \cdot 10^{-6}\,\text{C} - 18 \cdot 10^{-6}\,\text{C} = 6 \cdot 10^{-6}\,\text{C}$$

ergibt. Nach vollzogener Trennung wird nunmehr jede die gleiche Ladung haben, nämlich

$$Q_1 = Q_2 = +3 \cdot 10^{-6}\,\text{C}.$$

Demzufolge beträgt die Kraft, mit der sich beide Kugeln im Abstand $r = 6$ cm abstoßen,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{3 \cdot 10^{-6}\,\text{C} \cdot 3 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\text{As}\,\text{V}^{-1}\,\text{m}^{-1}\,0{,}06^2\,\text{m}^2} = \underline{22{,}46\,\text{N}}.$$

2. Zwei positive Ladungen der Größe Q und $4Q$ wurden im Abstand l fest angeordnet. Auf der Verbindungslinie beider Ladungen soll eine dritte Ladung Q' so angeordnet werden, daß auf sie keine Kräfte ausgeübt werden. An welcher Stelle zwischen Q und $4Q$ muß ihr Ort sein?

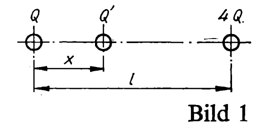


Bild 1

Lösung

Die im Beispiel angegebene Bedingung wird erfüllt, wenn die Kräfte, mit denen die beiden Ladungen Q und $4Q$ auf die Ladung Q' einwirken, von gleicher Größe und ent-

gegengesetzter Richtung sind. Gemäß Bild 90 können wir schreiben

$$\frac{QQ'}{4\pi\varepsilon x^2} = \frac{Q' 4Q}{4\pi\varepsilon (l-x)^2},$$

d. h.,

$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(l-x)^2}.$$

Nach einer Umformung erhalten wir die quadratische Gleichung

$$3x^2 + 2lx - l^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-2l \pm \sqrt{4l^2 + 12l^2}}{6} = \begin{cases} \frac{l}{3} \\ -l \end{cases}.$$

Da uns der zwischen beiden Ladungen liegende Punkt interessiert, verwenden wir die Lösung $\underline{x_1 = l/3}$. Somit befindet sich der Punkt, in dem auf die Ladung Q' keine Kräfte ausgeübt werden, in $^1/_3$ des Abstands beider Ladungen, gemessen von der kleineren Ladung aus.

3. Zwei Kugeln mit gleichen elektrischen Ladungen und je $5 \cdot 10^{-4}$ kg Masse werden im Vakuum an einem Punkt mit zwei Fäden von je 1 m Länge befestigt. Durch gegenseitige Abstoßung entfernen sie sich voneinander auf einen Abstand $r = 4$ cm. Wie groß sind ihre Ladungen?

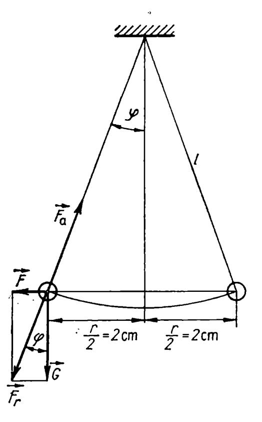


Bild 2

Lösung

Für eine in der Ruhelage befindliche Kugel hat die Resultierende $\vec{F}_r$ aus der elektrischen Kraft $\vec{F}$ und dem Gewicht der Kugel $\vec{G}$ die Richtung der Aufhängung. Die resultierende Kraft wird durch die Gegenwirkung der Aufhängung $\vec{F}_a$ kompensiert. Aus Bild 2 finden wir

$$\tan\varphi = \frac{F}{G}.$$

Gleichzeitig können wir bei nur kleinem Winkel φ schreiben

$$\tan\varphi \approx \sin\varphi = \frac{\frac{r}{2}}{l} = \frac{r}{2l}$$

und somit

$$\frac{F}{G} = \frac{r}{2l}.$$

Entsprechend dem COULOMBschen Gesetz ist die Kraft F definiert zu

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{QQ}{r^2},$$

und so ergibt sich

$$\frac{1}{G} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} = \frac{r}{2l}.$$

Damit erhalten wir für die Ladung einer Kugel

$$Q = \sqrt{\frac{r^3}{2l} 4\pi\varepsilon_0 G} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}04^3 \text{ m}^3}{2 \cdot 1 \text{ m}} 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \text{ As V}^{-1} \text{ m}^{-1} \cdot 0{,}5 \cdot 981 \cdot 10^{-5} \text{ N}} =$$

$$= \underline{4{,}177 \cdot 10^{-9} \text{ C}}.$$

4. Vier freie, gleich große, positive Punktladungen e befinden sich an den Eckpunkten eines Quadrats mit der Seitenlänge a (Bild 92). Welche Ladung müßte im Mittelpunkt des Quadrats angeordnet werden, damit das System aller Ladungen im Gleichgewicht ist?

Lösung

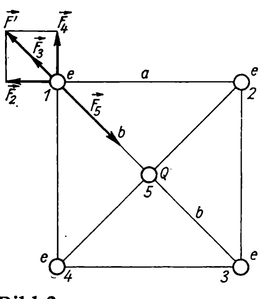


Bild 3

Die Gesamtdarstellung des Falles sehen wir in Bild 3. Auf eine Ladung e im Punkt *1* wirken die Ladungen der Punkte *2*, *3* und *4* mit den Kräften $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ und $\vec{F}_4$. Die resultierende Kraft $\vec{F}$, mit der diese drei Ladungen auf die eine Ladung im Punkt *1* wirken, ist durch die Vektorsumme der drei angegebenen Kräfte bestimmt. Die im Zentrum des Quadrats, im Punkt *5* anzuordnende Ladung soll so beschaffen sein, daß durch sie das gesamte System der Ladungen im Gleichgewicht ist. Sie muß also gegenüber den Ladungen in den Punkten *1* bis *4* entgegengesetztes Vorzeichen haben. Sie muß weiter groß genug sein, damit die Kraft $\vec{F}_5$, mit der sie auf die Ladung im Punkt *1* einwirkt, von gleicher Größe – jedoch bei umgekehrtem Vorzeichen – ist wie die Resultierende $\vec{F}$. Wir können also schreiben

$$|\vec{F}_5| = |\vec{F}|.$$

Bei Benutzung der in Bild 92 vorgenommenen Bezeichnungen können wir die vorstehende Gleichung auf die Form bringen

$$F' + F_3 = F_5, \tag{1}$$

wobei $F' = \sqrt{F_2^2 + F_4^2}$ die Resultierende der Kräfte F_2 und F_4 bedeutet. Gemäß dem COULOMBschen Gesetz ist

$$F_2 = F_4 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon a^2},$$

$$F' = \sqrt{F_2^2 + F_4^2} = \frac{e^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon a^2}.$$

Weiterhin können wir nach dem COULOMBschen Gesetz schreiben

$$F_3 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon\left(\frac{2a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon a^2}; \quad F_5 = \frac{eQ}{4\pi\varepsilon\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{eQ}{2\pi\varepsilon a^2}.$$

Nach Einsetzen dieser Beziehungen in Gl. (1) erhalten wir

$$\frac{e^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon a^2} + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon a^2} = \frac{eQ}{2\pi\varepsilon a^2},$$

woraus für den absoluten Wert der Ladung Q, die, wie bereits erläutert, umgekehrtes Vorzeichen gegenüber den Ladungen e_{1-4} haben muß, folgt:

$$\underline{Q = \frac{e}{4}\left(1 + 2\sqrt{2}\right).}$$

Die gleiche Erwägung gilt natürlich für jede andere Ladung der Größe e in den Eckpunkten des vorgegebenen Quadrats.

5. Wie groß ist die elektrische Feldstärke in einem Punkt (Bild 4), der mitten zwischen zwei elektrischen Ladungen $Q_1 = +50\,\mu C$ und $Q_2 = +70\,\mu C$ liegt, die voneinander einen Abstand $r = 0{,}2$ m haben? Die Ladungen befinden sich vollständig in Petroleum mit der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 2$.

Lösung

Die resultierende Feldstärke $\vec{E}$ in der Mitte zwischen beiden Ladungen ist gleich der Summe der beiden Feldstärken $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$, mit der die beiden Ladungen am gegebenen Ort wirken. Es ist also

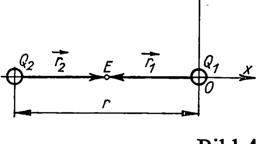


Bild 4

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

d. h.,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi 2\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1^3}\vec{r}_1 + \frac{1}{4\pi 2\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2^3}\vec{r}_2,$$

wobei $r_1 = r_2 = \frac{r}{2} = 0{,}1$ m und $\vec{r}_1 = -r_1\vec{\imath}$, $\vec{r}_2 = r_2\vec{\imath}$ ist, wenn $\vec{\imath}$ den Einheitsvektor in Richtung der x-Achse darstellt. Damit wird es möglich, zu schreiben

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi 2\varepsilon_0}\left(-\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{r_2^2}\right)\vec{\imath},$$

woraus für den absoluten Betrag der Feldstärke folgt

$$E = \frac{1}{4\pi 2\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{r_2^2} - \frac{Q_1}{r_1^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}}}\left(\frac{70 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}{0{,}1^2\,\mathrm{m}^2} - \frac{50 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}{0{,}1^2\,\mathrm{m}^2}\right) =$$

$$= \frac{20 \cdot 10^{-6}}{8\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}\,\mathrm{V\,m^{-1}} = \underline{8{,}988 \cdot 10^6\,\mathrm{V\,m^{-1}}}\,.$$

Die Feldstärke hat die Richtung des Einheitsvektors $\vec{i}$.

6. Bestimmen Sie in einem im Vakuum gelegenen Punkt A die Stärke eines elektrostatischen Feldes, das durch die beiden elektrischen Punktladungen $Q_1 = -4 \cdot 10^{-7}$ C und $Q_2 = 5 \cdot 10^{-7}$ C erzeugt wird (Bild 5); $r_1 = 0{,}4$ m, $r_2 = 0{,}3$ m, $r = 0{,}5$ m.

Lösung

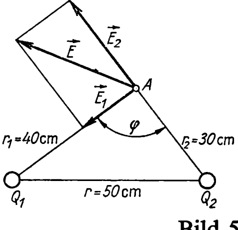


Bild 5

Für die Gesamtstärke des elektrostatischen Feldes im Punkt A können wir schreiben

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Hierbei sind $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ die Beiträge der beiden Ladungen zur Gesamtfeldstärke. Nach Bild 94 können wir für den absoluten Betrag der Gesamtfeldstärke schreiben

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos(180 - \varphi)}.$$

Da es möglich ist, den eingeschlossenen Winkel φ aus der Beziehung

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos\varphi$$

zu bestimmen, finden wir

$$\cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1r_2} = \frac{40^2 + 30^2 - 50^2}{2 \cdot 40 \cdot 30} = 0,$$

woraus sich der Winkel zu $\varphi = 90°$ ergibt. Es ist demnach

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}.$$

Der Feldanteil E_1 läßt sich errechnen zu

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}}}\,\frac{4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}}{0{,}4^2\,\mathrm{m}^2} = 22457\,\mathrm{V\,m^{-1}},$$

desgleichen der Anteil E_2 zu

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}}}\,\frac{5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}}{0{,}3^2\,\mathrm{m}^2} = 49905\,\mathrm{V\,m^{-1}}.$$

Daraus ergibt sich E zu

$$E = \sqrt{22457^2 + 49905^2}\,\mathrm{V\,m^{-1}} = \underline{54725\,\mathrm{V\,m^{-1}}}.$$

7. Berechnen Sie Potential und Stärke des elektrostatischen Feldes einer kreisförmigen Leiterplatte vom Radius $r = 0{,}1$ m in einem nach Bild 6 zu messenden Abstand $r_1 = 0{,}2$ m für den Fall, daß die Platte eine Ladung der Stärke $Q = 1\ \mu$C aufweist und daß sie sich im Vakuum befindet.

Lösung

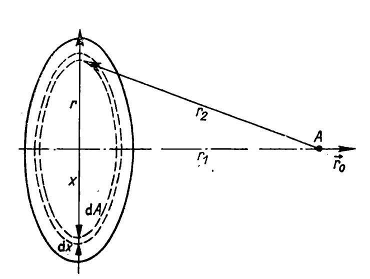


Bild 6

Da es sich hier um das Feld einer elektrischen Ladung handelt, die gleichförmig auf der Oberfläche eines Leiters verteilt ist, können wir das Potential gemäß dem Ansatz

$$U = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sigma\,\mathrm{d}A}{r_2}$$

berechnen. Dabei bedeutet σ die Flächendichte der Ladung, für die im vorliegenden Fall gilt

$$\sigma = \frac{Q}{\pi r^2}.$$

Das Flächenelement $\mathrm{d}A$ stellt hier einen Kreisring der Breite $\mathrm{d}x$ dar, so daß $\mathrm{d}A = 2\pi x\,\mathrm{d}x$ ist. Für das im Punkt A zu messende Potential können wir also schreiben

$$U = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\frac{Q}{\pi r^2}\,2\pi x\,\mathrm{d}x}{r_2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\int\limits_0^r \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r_1^2 + x^2}} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\sqrt{r_1^2 + x^2}\right]_0^r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\sqrt{r_1^2 + r^2} - r_1\right).$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir

$$U = \frac{10^{-6}\,\mathrm{C}}{2\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}}\cdot 0{,}1^2\,\mathrm{m^2}}\left(\sqrt{0{,}2^2\,\mathrm{m^2} + 0{,}1^2\,\mathrm{m^2}} - 0{,}2\,\mathrm{m}\right)$$

$$\underline{U = 4{,}252\cdot 10^4\,\mathrm{V}.}$$

Die Feldstärke bestimmen wir mit Hilfe der Beziehung

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Da die Feldstärke im Punkt A nur eine Funktion der Veränderlichen r_1 darstellt, können wir auch schreiben

$$\vec{E} = -\frac{\partial U}{\partial r_1}\vec{r}_0,$$

wobei $\vec{r}_0$ den Einheitsvektor in der in Bild 6 dargestellten Richtung bedeutet. Es wird demnach

$$\vec{E} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{2\,r_1}{\sqrt{r^2 + r_1^2}} - 1\right)\vec{r}_0,$$

d. h.,

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 - \frac{r_1}{\sqrt{r^2 + r_1^2}}\right)\vec{r}_0,$$

$$\vec{E} = \frac{10^{-6}\,\mathrm{C}}{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}}\,0{,}1^2\,\mathrm{m}^2}\left(1 - \frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{\sqrt{0{,}1^2\,\mathrm{m}^2 + 0{,}2^2\,\mathrm{m}^2}}\right)\vec{r}_0,$$

$$\underline{\vec{E} = 1{,}897 \cdot 10^5\,\vec{r}_0\,\mathrm{V\,m^{-1}}.}$$

8. Bestimmen Sie das Potential und die Feldstärke in der Umgebung eines kugelförmigen, positiv geladenen Leiters, dessen Radius die Größe r' und dessen Ladung die Flächendichte σ hat.

Lösung

Mit Hilfe des Lehrsatzes von GAUSS-OSTROGRADSKI kann man nachweisen, daß Feldstärke und Potential in der Umgebung der geladenen Kugel als Feldstärke und Potential einer in ihrem Mittelpunkt gelegenen Punktladung verstanden werden können. Deshalb ist für den Fall

a) $r > r'$ $\qquad U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma A}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma 4\pi r'^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \underline{\frac{\sigma r'^2}{\varepsilon_0 r}},$

wobei A die Kugeloberfläche und σ die Flächendichte der darauf befindlichen Ladung bedeutet.

Für die Feldstärke gilt die Beziehung

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{\varrho},$$

wobei $\vec{\varrho} = \frac{\vec{r}}{r}$ der Einheitsvektor in Richtung $\vec{r}$ ist. Dann gilt

$$\vec{E} = \frac{\sigma r'^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{\varrho} = \underline{\frac{\sigma r'^2}{\varepsilon_0 r^3}\vec{r}}.$$

b) Im Falle $r < r'$ ist das Potential im Innern des kugelförmigen Leiters das gleiche wie auf seiner Oberfläche, also für $r = r'$. Daraus ergibt sich

$$U = \frac{\sigma r'^2}{\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma r'^2}{\varepsilon_0 r'} = \underline{\frac{\sigma r'}{\varepsilon_0}}.$$

Da das Potential im Kugelinnern überall gleich ist, d. h. $U = \mathrm{const}$, wird die elektrostatische Feldstärke in ihrem Innern überall den Wert $\underline{\vec{E} = -\operatorname{grad} U = 0}$ haben.

9. Eine elektrisch leitfähige Seifenblase vom Radius $r = 2$ cm ist auf ein Potential von $U = 10000$ V aufgeladen. Durch Zerplatzen bildet sie sich in einen Wassertropfen mit dem Radius $r_1 = 0{,}05$ cm um. Wie groß ist das elektrische Potential U_1 dieses Tropfens?

Lösung

Vor dem Zerplatzen hatte das Potential der Seifenblase den Wert

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Auf der Oberfläche befindet sich also die Ladung

$$Q = 4\pi\, Ur\varepsilon_0.$$

Das Potential der nach dem Zerplatzen entstandenen kleinen Kugel ergibt sich dann zu

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r_1} = \frac{Ur \cdot 4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = U\frac{r}{r_1} = 10\,000\text{ V}\frac{0{,}02\text{ m}}{0{,}0005\text{ m}} = \underline{4 \cdot 10^5\text{ V}}.$$

10. Zwei Punktladungen $Q_1 = -3\ \mu$C und $Q_2 = +2\ \mu$C haben voneinander den Abstand $d = 5$ cm. Es ist diejenige Äquipotentialfläche des resultierenden Feldes zu bestimmen, auf der überall das Potential Null herrscht.

Lösung

Nach den in Bild 7 gewählten Bezeichnungen kann man das Potential im Punkt M wie folgt beschreiben:

$$U = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(d-x)^2 + y^2}}.$$

Wenn M auf der gesuchten Äquipotentialfläche liegen soll, dann muß dort $U = 0$ sein:

$$U = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(d-x)^2 + y^2}} = 0.$$

Nach Umformung erhalten wir daraus die Beziehung

$$(Q_1^2 - Q_2^2)\,x^2 + (Q_1^2 - Q_2^2)\,y^2 - 2Q_1^2xd + Q_1^2d^2 = 0. \tag{1}$$

Das ist die Gleichung einer Äquipotentialkurve des Potentials Null, die in derselben Ebene liegt, in der sich auch die beiden Ladungen Q_1 und Q_2 befinden. Es ist offenbar eine Kreislinie, deren Mittelpunkt auf der x-Achse, d. h. auf der Verbindungsgeraden der beiden Ladungen liegt. Um den Radius dieses Kreisbogens zu bestimmen, suchen wir den Punkt, in dem der Kreisbogen die x-Achse schneidet. Für $y = 0$ wird aus Gl. (1):

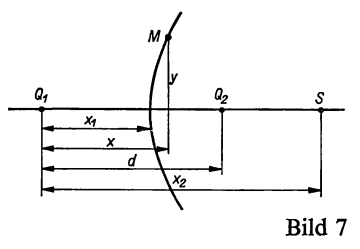


Bild 7

$$(Q_1^2 - Q_2^2)x^2 - 2Q_1^2xd + Q_1^2d^2 = 0,$$

d. h.,

$$x_1 = \frac{Q_1 d}{Q_1 - Q_2} = \frac{-3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{-5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}} = 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{cm};$$

$$x_2 = \frac{Q_1 d}{Q_1 + Q_2} = \frac{-3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{-1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}} = 15 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{cm}.$$

Der gesuchte Kreisradius ergibt sich dann zu

$$r = \frac{x_2 - x_1}{2} = \underline{6\,\mathrm{cm}.}$$

Der Mittelpunkt dieses Kreises befindet sich im Abstand $x_0 = x_1 + r = 9$ cm von der Ladung Q_1 entfernt. Als die gesuchte Äquipotentialfläche ergibt sich die Kugel, die durch Rotation der angegebenen Kreislinie um die x-Achse entsteht.

11. In einem elektrischen Feld besteht im Punkt A ein Potential der Größe $U_A = 300$ V, im Punkt B ein solches der Größe $U_B = 1200$ V. Welcher Arbeitsbetrag muß aufgebracht werden, um eine positive Ladung der Größe $Q = 3 \cdot 10^{-8}$ C vom Punkt A zum Punkt B zu transportieren?

Lösung

Die aufzubringende Arbeit wird dem Zuwachs an potentieller Energie gleich sein. Wir können also schreiben

$$W = W_B - W_A = QU_B - QU_A = Q(U_B - U_A) = (1200 - 300)\,\mathrm{V} \cdot 3 \cdot 10^{-8}\mathrm{C} =$$
$$= \underline{27 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}.}$$

Zur Lösung dieser Aufgabe haben wir den Ansatz $W = QU$ verwendet, der sich aus der Definition des Potentials ergibt.

12. Es ist die auf eine Punktladung Q wirkende Kraft zu ermitteln, die auftritt, wenn sich die Punktladung im Feld einer elektrisch geladenen, unendlich großen Metallplatte mit der Flächendichte σ befindet für den Fall, daß die Platte von einem Vakuum umgeben ist.

Lösung

Unter Benutzung der Definition der elektrostatischen Feldstärke können wir für die gesuchte Kraft schreiben

$$\vec{F} = \vec{E}Q.$$

Unter der gegebenen Voraussetzung, daß es sich um eine unendlich große, elektrisch geladene Platte handelt, wird das Feld über der Platte homogen sein. Wir können in diesem Fall die Feldstärke ermitteln, indem wir für den Wert der elektrostatischen Feldstärke, die wir im Beispiel 207 für eine Kreisscheibe bestimmten, den Grenzwert für

$r \to \infty$ bilden. Dann wird

$$\vec{E} = \lim_{r\to\infty} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r_1}{\sqrt{r^2 + r_1^2}}\right)\vec{r}_{10} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{r}_{10},$$

wobei $\vec{r}_{10}$ den Einheitsvektor darstellt, der senkrecht auf der Plattenebene steht. Auf die Ladung Q wird dann in einem beliebigen Punkt dieses Feldes die Kraft

$$\vec{F} = \vec{E}Q = \frac{\sigma Q}{2\varepsilon_0}\vec{r}_{10}$$

wirken.

13. Zwei unendlich große, elektrisch leitende, ebene Wände stehen elektrisch isoliert senkrecht aufeinander (Bild 8). Wie groß ist die elektrische Feldstärke in ihrer Nähe, wenn auf der einen eine Ladungsdichte σ und auf der anderen die doppelte Ladungsdichte, also 2σ, besteht und wenn in ihrer Umgebung ein Vakuum herrscht?

Lösung

Die Wände werden selbständig jede für sich elektrische Felder erzeugen, die senkrecht zueinander gerichtet sind und Feldstärken mit den Beträgen

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{und} \quad \vec{E}_2 = \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

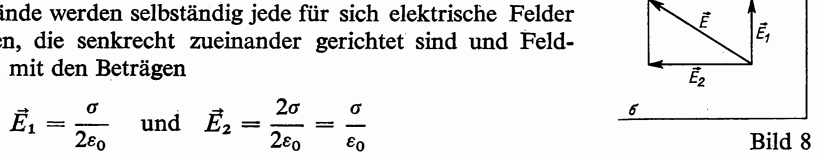


Bild 8

haben. Das resultierende Feld ergibt sich in jedem Punkt aus der Vektorsumme von $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$. Unter der Voraussetzung, daß $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ senkrecht aufeinander stehen, können wir für die resultierende Feldstärke schreiben

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4\varepsilon_0^2} + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2}} = \sqrt{\frac{5\sigma^2}{4\varepsilon_0^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

14. Eine elektrisch leitende Kugel vom Durchmesser $2r = 1$ m hat ein negatives absolutes Potential von $U = 10^6$ V. Sie befindet sich an einem Punkt im Vakuum, wo das elektrische Erdfeld gerade die Stärke $E = 10^4\ \mathrm{V\,m^{-1}}$ aufweist, im Schwebezustand. Wie groß ist ihr Gewicht?

Lösung

Wenn die elektrisch geladene leitfähige Kugel im Vakuum an einem bestimmten Punkt des elektrischen Erdfeldes gerade schwebt, dann müssen die beiden auf die Kugel wirkenden Kräfte Gewicht G und die Kraft F des elektrischen Erdfeldes gerade gleich groß und einander entgegengerichtet sein. Wir können deshalb schreiben

$$G = F.$$

Für F gilt dabei $F = EQ$. Die auf der Kugel enthaltene Ladung Q können wir mit dem Ansatz für das absolute Potential der Kugel ermitteln

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r},$$

woraus sich ergibt

$$Q = U \cdot 4\pi\varepsilon_0 r.$$

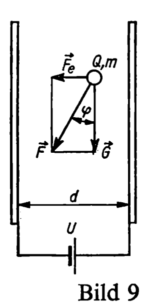


Bild 9

Wegen des negativen Potentials muß auch die Ladung Q negatives Vorzeichen haben. Der Vektor der Feldstärke des irdischen Erdfeldes ist auf den Erdmittelpunkt hin gerichtet. Deshalb hat die auf die Kugel wirkende Kraft F die Richtung senkrecht aufwärts. Für das gesuchte Gewicht der Kugel ergibt sich somit die Beziehung

$$G = F = EQ = 4\pi\varepsilon_0 r\, UE =$$
$$= 4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}}\; 0{,}5\,\mathrm{m} \cdot 10^6\,\mathrm{V} \cdot 10^4\,\mathrm{Vm^{-1}} =$$
$$= \underline{0{,}555\,\mathrm{N}} = \underline{56{,}74 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kp}}.$$

15. Zwischen zwei ebenen, parallel zueinander vertikal im Abstand $d = 0{,}5$ cm angeordneten, elektrisch geladenen Platten befindet sich ein elektrisch geladenes Tröpfchen der Masse $m = 10^{-9}$ g (Bild 9). Wenn die Platten bis zu einer Potentialdifferenz von $U = 400$ V aufgeladen werden, fällt das Tröpfchen im freien Fall unter einem Winkel $\varphi = 7°\,25'$ gegen die Vertikale herab. Bestimmen Sie die auf dem Tröpfchen befindliche Ladungsmenge.

Lösung

Bei der Berechnung gehen wir von der Tatsache aus, daß das Tröpfchen in der Richtung der resultierenden Kraft fällt. Diese resultierende Kraft ist aus der Vektorsumme der beiden Kräfte $\vec{F}_e = Q\vec{E}$ und $\vec{G} = m\vec{g}$ gebildet. Die Ladung des Tröpfchens sei Q. Da das elektrische Feld zwischen den beiden Platten bestehen soll, gilt

$$U = Ed,$$

also

$$E = \frac{U}{d}.$$

Unter Berücksichtigung der in Bild 98 gewählten Bezeichnungen können wir schreiben

$$\tan\varphi = \frac{QE}{mg} = \frac{Q\frac{U}{d}}{mg} = \frac{QU}{mgd},$$

d. h. also,

$$Q = \frac{mgd\tan\varphi}{U} = \frac{10^{-9} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{ms^{-2}} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot \tan 7°\,25'}{400\,\mathrm{V}} =$$
$$= \underline{1{,}596 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{C}}.$$

16. Eine Kugel der Masse $m = 10$ g trägt die elektrische Ladung $Q = {}^5/_3 \cdot 10^{-9}$ C. Mit welcher Beschleunigung wird sich diese Kugel in einem elektrischen Feld der Stärke $E = 3 \cdot 10^4$ Vm^{-1} bewegen?

Lösung

Entsprechend der Definition der elektrischen Feldstärke gilt

$$E = \frac{F}{Q}$$

und somit

$$F = EQ.$$

Andererseits gilt allgemein nach dem II. NEWTONschen Gesetz

$$F = ma.$$

Infolgedessen können wir nach Vergleich der beiden letztgenannten Gleichungen schreiben

$$FQ = ma.$$

Für den gesuchten Wert der in Feldrichtung wirkenden Beschleunigung erhalten wir demnach

$$a = \frac{EQ}{m} = \frac{300 \cdot 10^2\ \text{Vm}^{-1} \cdot \dfrac{5}{3} \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{10 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}} = \underline{5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}\,\text{s}^{-2}}.$$

17. Zwischen den Platten eines Kondensators befindet sich ein Dielektrikum aus Glas von 0,1 cm Dicke. Wie groß muß die Belagfläche des Kondensators sein, damit er eine Kapazität von 150 pF annimmt?

Lösung

Die Kapazität des Kondensators ist durch die Beziehung $C = Q/U$ definiert. Dabei ist Q die auf einer Platte des Kondensators befindliche Ladung und die im Zähler der angegebenen Beziehung auftretende Größe U das Potential dieser Kondensatorfläche in bezug auf die gegenüberliegende Fläche. Da wir bei einem Plattenkondensator das zwischen den Platten bestehende Feld als homogen ansehen können, gilt für das Potential die Beziehung

$$U = Ed$$

(d Abstand der beiden Platten, E Stärke des homogenen elektrischen Feldes). Für die Feldstärke liefert das COULOMBsche Gesetz den Ansatz: $E = \sigma/\varepsilon = Q/\varepsilon A$ (A Fläche einer Kondensatorplatte). Für die Kapazität des Plattenkondensators können wir dann end-

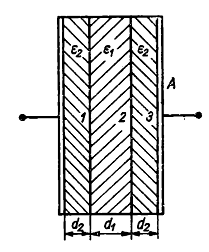
gültig schreiben

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon A}d} = \frac{\varepsilon A}{d}.$$

Hieraus erhalten wir für die gesuchte Fläche des Plattenkondensators

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon} = \frac{150 \cdot 10^{-12}\,\text{F} \cdot 1 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\text{As}\,\text{V}^{-1}\,\text{m}^{-1} \cdot 7} = \underline{2{,}4188 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^2}.$$

18. Berechnen Sie die Kapazität eines Plattenkondensators von 200 cm² Belagfläche. Zwischen den Belägen befindet sich Glas der Dicke $d_1 = 0{,}1$ cm, das beiderseits mit einer Paraffinschicht der Dicke $d_2 = 0{,}02$ cm bedeckt ist. Die Dielektrizitätszahlen betragen für Glas $\varepsilon_1 = 7$, für Paraffin $\varepsilon_2 = 2$.



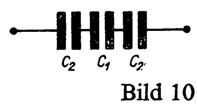


Bild 10

Lösung

Gemäß Bild 10 ist die dielektrische Verschiebung in allen Dielektrika gleich groß, so daß wir finden

$$D = \frac{Q}{A} = D_1 = D_2,$$

d. h.,

$$D = \varepsilon_0\varepsilon_r E = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_2.$$

Wenn wir die Potentialdifferenzen zwischen den einzelnen Schichten mit Hilfe der jeweiligen elektrostatischen Feldstärken ausdrücken, erhalten wir

$$U_{01} = E_2 d_2 = E_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2,$$

$$U_{12} = E_1 d_1,$$

$$U_{23} = E_2 d_2 = E_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2.$$

Für die resultierende Potentialdifferenz können wir dann schreiben:

$$U = U_{01} + U_{12} + U_{23} = E_1 d_1 + 2E_2 d_2 = E_1 d_1 + 2E_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2,$$

$$U = E_1 \left(d_1 + 2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2\right) = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_1}\left(d_1 + 2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2\right).$$

Für die Kapazität des Plattenkondensators erhalten wir

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{AD}{\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_1}\left(d_1 + 2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2\right)} = \frac{A}{\frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon_1} + 2\frac{d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_2}} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 A}{2\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}.$$

Da die vorletzte Gleichung auch in der Form

$$C = \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 A} + 2\frac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 A}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + 2\frac{1}{C_2}}$$

geschrieben werden kann, wird ersichtlich, daß die Kapazität eines derartigen Plattenkondensators auch als die dreier in Serie geschalteter einzelner Plattenkondensatoren berechnet werden kann, wie es aus der Darstellung in Bild 99 hervorgeht. Die drei Einzelkondensatoren sind mit den Symbolen C_2, C_1, C_2 gekennzeichnet. Wenn wir die zugehörigen Zahlenwerte einsetzen, erhalten wir schließlich

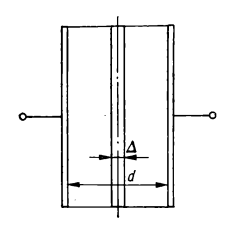
$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 A}{2\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}}\; 7 \cdot 2 \cdot 200 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}}{2 \cdot 7 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} + 2 \cdot 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} =$$
$$= \underline{516{,}8 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}.}$$

19. Ein Luftkondensator mit ebenen Platten hat bei einem Plattenabstand $d = 1$ cm die Kapazität $C_0 = 10$ pF. Zwischen die beiden Kondensatorplatten werde ein Stück Blech der Dicke $\Delta = 0{,}1$ cm eingeschoben, das so groß ist, daß jegliche Randwirkungen vernachlässigt werden können. Wie groß ist die sich dann einstellende Kapazität?

Lösung

Durch das Einschieben der Platte der vorgenannten Dicke wird der Kondensator von der ursprünglichen Kapazität

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{1}$$



in zwei Kondensatoren mit den Kapazitäten

$$C' = \frac{\varepsilon_0 A}{\frac{d - \Delta}{2}} = 2\frac{\varepsilon_0 A}{d - \Delta}$$

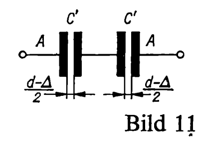


Bild 11

zerlegt, die in Serie geschaltet sind (Bild 11). Die resultierende Kapazität dieser Kombination erfüllt sodann die Bedingung

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C'} = \frac{2}{C'},$$

so daß sich ergibt

$$C = \frac{C'}{2} = \frac{\varepsilon_0 A}{d - \Delta}.$$

Aus Gl. (1) geht aber hervor, daß

$$\varepsilon_0 A = C_0 d$$

ist, so daß wir nach Einsetzen der vorgegebenen Werte erhalten

$$C = C_0 \frac{d}{d - \varDelta} = 10\,\text{pF} \frac{1\,\text{cm}}{1\,\text{cm} - 0{,}1\,\text{cm}} = 10 \frac{1}{0{,}9}\,\text{pF} = \underline{11{,}11\,\text{pF}.}$$

20. Auf welches Potential U_1 muß ein Kondensator der Kapazität $C_1 = 2\,\mu\text{F}$ aufgeladen werden, damit er die gleiche Ladung trägt, die von einer Leydener Flasche der Kapazität $C_2 = 900\,\text{pF}$ bei einer Spannung vom Betrag $U_2 = 30000\,\text{V}$ gespeichert wird?

Lösung

Für die Ladungen auf den Platten der beiden Kondensatoren können wir schreiben

$$Q_1 = C_1 U_1; \quad Q_2 = C_2 U_2.$$

Da entsprechend der Aufgabenstellung $Q_1 = Q_2$ sein soll, gilt

$$C_1 U_1 = C_2 U_2,$$

woraus wir für das gesuchte Potential erhalten

$$U_1 = U_2 \frac{C_2}{C_1} = 30000\,\text{V} \frac{900 \cdot 10^{-12}\,\text{F}}{2 \cdot 10^{-6}\,\text{F}} = \underline{13{,}5\,\text{V}.}$$

21. Berechnen Sie die Kapazität eines aus zwei koaxialen Zylindern bestehenden Kondensators der Abmessungen Höhe $h = 20\,\text{cm}$, Plattenradien $r_1 = 3\,\text{cm}$, $r_2 = 4\,\text{cm}$, dessen Dielektrikum ein Vakuum ist (Bild 12).

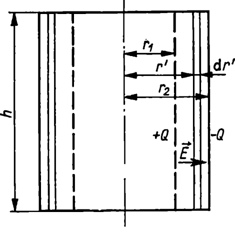


Bild 12

Lösung

Für die Berechnung der Kapazität muß zunächst das Potential zum Beispiel einer (positiven) inneren gegenüber einer äußeren Platte ermittelt werden. Dieses Potential ist gleich dem Quotienten aus der Arbeit W, die wir bei dem Transport der Ladung entgegen den Kräften dieses Feldes von der äußeren auf die innere Platte zu verrichten haben, und der übertragenen Ladung selbst. Wir können demnach schreiben

$$U = \frac{W}{Q} = \frac{1}{Q} \int_{r_2}^{r_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{Q} \int_{r_2}^{r_1} (-\vec{E}Q)\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_2}^{r_1} E\,\mathrm{d}r = -\int_{r_2}^{r_1} E\,\mathrm{d}r',$$

da die Feldstärke und die infinitesimale Vektorgröße $\mathrm{d}\vec{r}$ einander entgegengerichtet sind und da $\mathrm{d}r = -\mathrm{d}r'$ ist. Den Wert der elektrostatischen Feldstärke erhalten wir mit Hilfe des Lehrsatzes von Gauss-Ostrogradski, wonach der Strom durch die Oberfläche eines angenommenen Zylinders vom Radius r' dem Quotienten der im Innern des Zylinders enthaltenen Ladung und der Dielektrizitätskonstante des umgebenden Me-

diums gleich ist. Es ist daher

$$E \cdot 2\pi r' h = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

da der Strom durch die Zylindergrundfläche in Richtung der Feldstärke gleich Null ist. Daraus ergibt sich

$$E = \frac{Q}{2\pi r' h \varepsilon_0}.$$

Für das Potential U erhalten wir damit

$$U = \int_{r_2}^{r_1} -E\, dr' = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \int_{r_2}^{r_1} -\frac{dr'}{r'} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Schließlich erhalten wir die Kapazität des Zylinderkondensators zu

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \text{As V}^{-1}\ \text{m}^{-1} \cdot 0{,}2\ \text{m}}{2{,}3 \lg \frac{0{,}04\ \text{m}}{0{,}03\ \text{m}}} = \underline{38{,}7 \cdot 10^{-12}\ \text{F}}.$$

22. Berechnen Sie die Kapazität eines Kugelkondensators, der aus zwei konzentrisch angeordneten, elektrisch leitenden Flächen mit den Radien r_1 und r_2 gebildet wird, zwischen denen sich ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε befindet.

Lösung

Wir gehen ganz analog wie im Beispiel des Zylinderkondensators vor, indem wir die Feldstärke E unter Anwendung des Lehrsatzes von GAUSS-OSTROGRADSKI bestimmen. Wir können also schreiben

$$4\pi r'^2 E = \frac{Q}{\varepsilon},$$

wobei r' den Radius einer beliebigen gedachten Kugelfläche zwischen den beiden Kugelelektroden bedeutet, mit denen sie den Mittelpunkt gemein hat. Das Potential bestimmen wir wie vordem gemäß der Beziehung

$$U = \int_{r_2}^{r_1} -\vec{E}\, d\vec{r} = \int_{r_2}^{r_1} E\, dr = \int_{r_2}^{r_1} -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r'^2} dr' =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

weil auch hier $dr = -dr'$ ist.

Die Kapazität des Kugelkondensators ergibt sich damit zu

$$\underline{C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} .$$

23. Wie groß sind die Kapazitäten der in den Bildern 13a bis d dargestellten Kondensatorkombinationen? Die einzelnen auf den Bildern 13a bis c eingesetzten Kapazitäten haben folgende Werte:

a) $C_1 = 6\,\mu\text{F}, \quad C_2 = 2\,\mu\text{F}, \quad C_4 = 3\,\mu\text{F}, \quad C_5 = 3\,\mu\text{F};$

b) $C_1 = 2\,\mu\text{F}, \quad C_2 = 4\,\mu\text{F}, \quad C_3 = 4\,\mu\text{F}, \quad C_4 = 2\,\mu\text{F};$

c) $C_1 = 6\,\mu\text{F}, \quad C_2 = 2\,\mu\text{F}, \quad C_3 = 1\,\mu\text{F}, \quad C_4 = 3\,\mu\text{F}.$

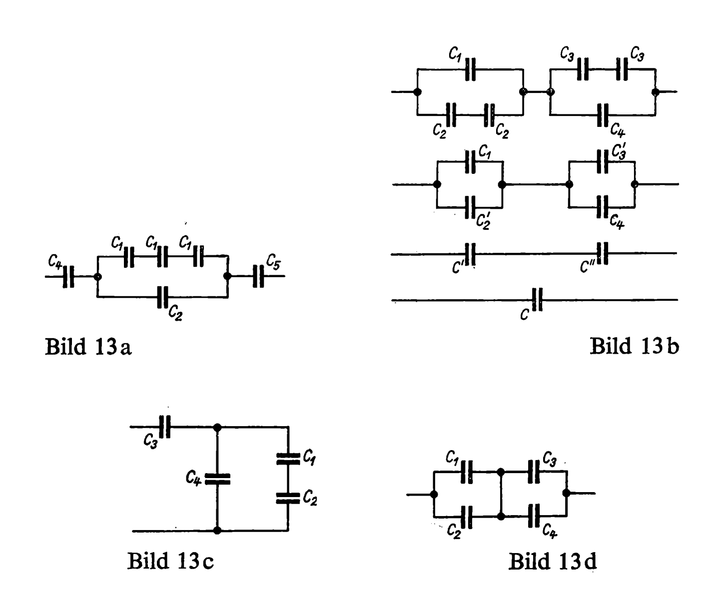


Bild 13a

Bild 13b

Bild 13c

Bild 13d

Lösung

Wir verfahren in der Weise, daß wir die in Serie oder die parallelgeschalteten Kondensatoren zusammenfassen und mit dieser Zusammenfassung ein Ersatzschaltbild schaffen, das wir weiterhin vereinfachen können. Dabei wird uns die Berechnung erleichtert, wenn uns bekannt ist, daß zwei gleiche, in Serie geschaltete Kondensatoren eine resultierende Kapazität haben, die gleich der halben Kapazität jeweils eines einzelnen ist, während zwei gleiche, parallelgeschaltete Kondensatoren eine resultierende Kapazität haben, die der doppelten Kapazität je eines der beiden Kondensatoren gleich ist. Bei

der Serienschaltung ist also

$$\frac{1}{C_g} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C}; \quad C_g = \frac{C}{2},$$

und bei der Parallelschaltung

$$C_g = C + C = 2C.$$

Analog läßt sich nachweisen, daß bei drei in Serie geschalteten Kondensatoren die resultierende Kapazität $C_g = C/3$ ist, wogegen bei der Parallelschaltung $C_g = 3C$ ist. Die einzelnen in Bild 102 dargestellten Fälle werden demnach wie folgt behandelt:

a) Drei Kapazitäten von je 6 μF ergeben in Serie geschaltet $C_1' = \frac{C_1}{3} = \frac{6\,\mu\text{F}}{3} = 2\,\mu\text{F}$.
Diese resultierende Kapazität C_1' ist mit der Kapazität C_2 parallelgeschaltet, also ist $C_3' = C_1' + C_2 = (2 + 2)\,\mu\text{F} = 4\,\mu\text{F}$. Diese Kapazität C_3' ist mit den beiden außen liegenden je 3 μF großen in Serie geschaltet, so daß sich ergibt

$$\frac{1}{C_g} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_3'} + \frac{1}{C_5} = \frac{1}{3\,\mu\text{F}} + \frac{1}{4\,\mu\text{F}} + \frac{1}{3\,\mu\text{F}} = \frac{11}{12\,\mu\text{F}};$$

$$C_g = \frac{12}{11}\,\mu\text{F} = \underline{1{,}09\,\mu\text{F}}.$$

b) Die Kapazitäten C_2 sind in Serie geschaltet, so daß ihre resultierende Kapazität den Wert $C_2' = C_2/2 = 2\,\mu\text{F}$ annimmt. Auf der linken Seite des Schaltbildes befinden sich somit die beiden parallelgeschalteten Kapazitäten C_1 und C_2', so daß deren resultierende Kapazität $C' = C_1 + C_2' = (2 + 2)\,\mu\text{F} = 4\,\mu\text{F}$ wird. Analog kann man leicht ermitteln, daß die resultierende Kapazität C'' der rechten Seite der Schaltung ebenfalls den Wert $C'' = 4\,\mu\text{F}$ annehmen muß. Da C' und C'' in Serie geschaltet sind, ist offenkundig, daß die resultierende Kapazität der gesamten Schaltung $\underline{C_g = 2\,\mu\text{F}}$ sein wird.
Die Ersatzschaltbilder, die zur Berechnung herangezogen wurden, sind in dem unteren Teil des Bildes 102b dargestellt.

c) Die Kapazitäten C_1 und C_2 können wir durch die resultierende Kapazität C_1' ersetzen:

$$\frac{1}{C_1'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{2\,\mu\text{F}} + \frac{1}{3\,\mu\text{F}},$$

also

$$C_1' = \frac{3}{2}\,\mu\text{F} = 1{,}5\,\mu\text{F}.$$

Da die Kapazitäten C_1' und C_4 parallelgeschaltet sind, können wir sie durch die resultierende Kapazität

$$C_2' = C_1' + C_4 = 1{,}5\,\mu\text{F} + 3\,\mu\text{F} = 4{,}5\,\mu\text{F}$$

ersetzen. Die Kapazitäten C_3 und C_2' sind nunmehr in Serie geschaltet, so daß die gesuchte resultierende Kapazität C_g der gesamten Schaltung sich ergibt zu

$$\frac{1}{C_g} = \frac{1}{C_2'} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{4{,}5\,\mu\text{F}} + \frac{1}{1\,\mu\text{F}} = \frac{5{,}5}{4{,}5\,\mu\text{F}},$$

d. h.,

$$C_g = \frac{4{,}5\ \mu\text{F}}{5{,}5} = \underline{0{,}82\ \mu\text{F}}.$$

d) C_1 ist mit C_2 parallelgeschaltet, ebenso sind C_3 und C_4 parallel angeordnet. Das Kapazitätenpaar C_1 und C_2 und das Paar C_3 und C_4 sind in Serie geschaltet, so daß für die resultierende Kapazität gilt

$$\frac{1}{C_g} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4} = \frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)},$$

d. h.,

$$\underline{C_g = \frac{C_1C_3 + C_1C_4 + C_2C_3 + C_2C_4}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}}.$$

24. Ein luftgefüllter Plattenkondensator besteht aus zwei Platten mit dem Flächeninhalt $A = 1000\ \text{cm}^2$, die voneinander in einem Abstand $x = 0{,}1$ cm angeordnet sind. Mit welcher Kraft ziehen sich die beiden Platten an, wenn sie auf ein Potential von $U = 1000$ V aufgeladen werden?

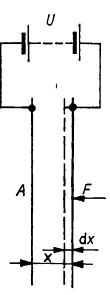


Bild 14

Lösung

a) Das angegebene Beispiel betrachten wir zunächst unter dem Gesichtspunkt energetischer Vorstellungen. Wir bezeichnen die Kraft, mit der sich die beiden Platten anziehen, mit dem Symbol F. Aus dem Gesetz von der Erhaltung der Energie ergibt sich, daß die Arbeit, welche die Kraft F bei einer Annäherung der beiden Platten um das infinitesimale Wegelement dx verrichtet, genau der Abnahme der Energie des zwischen den beiden Platten liegenden elektrostatischen Feldes gleich sein muß. (Das Feld soll vollständig zwischen den Kondensatorplatten gelegen sein.) Nach Bild 14 können wir schreiben

$$F\,\mathrm{d}x = \frac{W_e}{V} A\,\mathrm{d}x,$$

wobei W_e die Energie des elektrostatischen Feldes im Gesamtvolumen des Dielektrikums und V das Volumen des Dielektrikums bedeutet, so daß die Energiedichte des elektrostatischen Feldes mit W_e/V angegeben wird. Für die Energie des elektrostatischen Feldes eines Kondensators gilt jedoch die Beziehung $W_e = {}^1/_2\, CU^2$, so daß wir finden

$$F\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{1}{2} CU^2}{Ax} A\,\mathrm{d}x,$$

wenn wir auch das Volumen durch die Beziehung $V = Ax$ ausdrücken. Für die gesuchte Kraft finden wir dann

$$F = \frac{CU^2}{2x}$$

und nach einer Umformung

$$F = \frac{\frac{\varepsilon A}{x} U^2}{2x} = \frac{\varepsilon A U^2}{2x^2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A U^2}{2x^2}.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich schließlich

$$F = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}} \cdot 1 \cdot 1000 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2} \cdot 1000^2\,\mathrm{V^2}}{2\,(1 \cdot 10^{-3})^2\,\mathrm{m^2}} =$$

$$= \frac{8{,}854 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N\,m^2}}{2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2}} = \underline{0{,}4427\,\mathrm{N}}.$$

b) Das Beispiel läßt sich auch durch die direkte Berechnung der gesuchten Kraft bearbeiten. Die Ladung $+Q$ der einen wirkt auf die Ladung $-Q$ der anderen Platte durch eine Anziehungskraft vom Betrag

$$F = E_0 Q,$$

wobei E_0 die elektrische Feldstärke des nur durch die eine Ladung $+Q$ erregten Feldes darstellt. Das homogene Feld zwischen beiden Kondensatorplatten wird durch die Feldstärke $E = 2E_0$ gekennzeichnet, da das resultierende Feld sowohl durch die Ladung $+Q$ als durch die $-Q$ gleicherweise erregt wird und beide Ladungen am Entstehen des Gesamtfeldes durch gleiche Beiträge beteiligt sind. Da weiterhin (entspr. Beispiel 217) $E = \sigma/\varepsilon$ ist, können wir auch schreiben

$$F = E_0 Q = \frac{E}{2} Q = \frac{\sigma}{2\varepsilon} Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon A} = \underline{\frac{1}{2} \frac{CU^2}{x}}$$

unter der Voraussetzung, daß wir bei der Umformung des Ausdrucks für die Kraft F die Beziehungen $\sigma = Q/A$, $Q = CU$ und $C = \varepsilon A/x$ verwenden.

25. Ein luftgefüllter Plattenkondensator der Kapazität $C_1 = 500\,\mathrm{pF}$ ist auf eine Spannung $U_1 = 5000\,\mathrm{V}$ aufgeladen. Der Kondensator enthält als Dielektrikum eine Platte, deren Material durch die Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 5$ charakterisiert ist. Welche Arbeit muß man verrichten, um diese Platte aus dem Kondensator zu entfernen, und wie verändert sich nach Entfernen der Isolierplatte die am Kondensator anliegende Spannung?

Lösung

Wir stellen zunächst fest, um welchen Betrag sich die Kapazität des Kondensators durch das Entfernen der Isolierplatte verringert. Da die Dielektrizitätszahl das Verhältnis der beiden Kapazitäten des Kondensators mit und ohne Dielektrikum angibt, also C_1 bzw. C_2, können wir schreiben

$$\varepsilon_r = \frac{C_1}{C_2},$$

d. h.,

$$C_1 = \varepsilon_r C_2.$$

Da weiter die auf den Kondensatorplatten enthaltene Ladungsmenge durch die Entfernung der Isolierplatte nicht verändert wird, gilt

$$C_1 U_1 = C_2 U_2 .$$

Somit wird sich nach Herausziehen der Platte aus dem Kondensator die neue Spannung

$$U_2 = U_1 \frac{C_1}{C_2} = \varepsilon_r\, U_1 = 5 \cdot 5000\ \text{V} = \underline{25000\ \text{V}}$$

einstellen.
Die für das Herausziehen der Isolierplatte erforderliche Arbeit bestimmen wir als die Differenz der Energie des elektrostatischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten mit und ohne Isolierplatte, so daß sich ergibt

$$W = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1}{\varepsilon_r} (\varepsilon_r U_1)^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} C_1 U_1^2 \varepsilon_r - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 (\varepsilon_r - 1) =$$

$$= \frac{1}{2} 500 \cdot 10^{-12}\ \text{F} \cdot 5000^2\ \text{V}^2 (5 - 1) = \underline{25 \cdot 10^{-3}\ \text{J}} .$$

26. Zwischen den beiden Platten eines Kondensators mit dem Flächeninhalt $A = 500\ \text{cm}^2$, die voneinander einen Abstand $d = 1$ cm haben, besteht eine Spannung der Größe $U_1 = 5000$ V. Welche Arbeit muß verrichtet werden, damit sich der Abstand der beiden Kondensatorplatten auf $d' = 4$ cm vergrößert?

Lösung

Die gesuchte Arbeit muß gleich der Energiedifferenz des zwischen den beiden Kondensatorplatten bestehenden elektrostatischen Feldes bei den Abständen $d' = 4$ cm und $d = 1$ cm sein. In den beiden Stellungen sind diese Energien gegeben durch

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 ; \quad W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 .$$

Die Kapazität C_2 können wir mittels C_1 und die Spannung U_2 mittels U_1 ausdrücken. Wir erhalten dann

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} ; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d'} = \frac{\varepsilon_0 A}{4d} = \frac{C_1}{4} .$$

Da sich die auf den Kondensatorplatten enthaltene Ladung bei einer Veränderung des Abstands nicht mit ändert, sondern konstant bleibt, ist

$$C_1 U_1 = C_2 U_2 ,$$

d. h.,

$$U_2 = U_1 \frac{C_1}{C_2} - U_1 \frac{C_1}{\frac{C_1}{4}} = 4 U_1 .$$

Daraus ergibt sich

$$W = W_1 - W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} C_1 \frac{1}{4} (4U_1)^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 =$$

$$= \frac{16}{8} C_1 U_1^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{3}{2} C_1 U_1^2 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} U_1^2 =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As \cdot V^{-1}\,m^{-1}} \cdot 500 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}}{0{,}01\,\mathrm{m}} 5000^2\,\mathrm{V^2} = \underline{1{,}661 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J}}.$$

A Aufgaben

1. Zwei gleich große, auf zwei kleinen Kugeln aufgebrachte Ladungen sind 10 cm voneinander entfernt und wirken im Vakuum durch eine Kraft von $4{,}9 \cdot 10^{-4}$ N aufeinander. Berechnen Sie die Größe der beiden Ladungen.
2. Zwei Ladungen wirken in einem Medium mit der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 1$ im Abstand 11 cm mit der gleichen Kraft aufeinander wie in Terpentin in einem Abstand von nur 7,4 cm. Berechnen Sie die Dielektrizitätszahl des Terpentins.
3. In den Eckpunkten eines ebenen gleichseitigen Dreiecks sind Punktladungen der Größe e angeordnet. Wie groß müßte eine im Mittelpunkt des Dreiecks liegende Punktladung sein, damit sich die Ladungen im Gleichgewicht befinden?
4. Welche Ladungen Q müssen auf zwei gleich großen Kugeln von je 10 g Masse angebracht werden, damit die zwischen den Kugeln wirkenden Massenanziehungskräfte durch die elektrostatischen Abstoßungskräfte kompensiert werden?
5. Vergleichen Sie die zwischen zwei Elektronen wirkenden Massenanziehungs- und elektrostatischen Abstoßungskräfte.
6. Bestimmen Sie die Flächendichte der auf einer Kugel von 5 cm Radius enthaltenen Ladung $Q = 0{,}1$ µC.
7. Welche Stärke hat das elektrische Feld einer Punktladung $Q = 144 \cdot 10^{-6}$ C in einem Abstand von $r = 6$ cm, 12 cm, 18 cm im Vakuum?
8. Zwei Punktladungen gleichen Vorzeichens der Stärken $Q_1 = 8$ µC und $Q_2 = 5$ µC haben voneinander den Abstand $d = 20$ cm.
   a) In welchem auf ihrer Verbindungslinie gelegenen Punkt ist die elektrostatische Feldstärke gleich Null?
   b) In welchem auf ihrer Verbindungslinie gelegenen Punkt sind die durch beide Ladungen hervorgerufenen Potentiale gleich groß?
9. Eine Ladung $Q = 5 \cdot 10^{-7}$ C erregt im Vakuum ein elektrostatisches Feld. Die Punkte A und B liegen mit der Ladung Q auf einer Geraden und haben von Q den Abstand $r_1 = 2$ cm bzw. $r_2 = 10$ cm. Wie groß ist die zwischen A und B bestehende Spannung?
10. Wie groß müßte der Radius einer Kugel gewählt werden, auf die eine Ladung $Q = 1$ C gebracht werden kann, ohne daß Sprüheffekte auftreten? (Die maximale Feldstärke, bei der in Luft gerade noch kein Sprühen beobachtet wird, beträgt 25 kV cm^{-1}.)
11. Auf welches absolute Potential würde sich die Erde ($r = 6378$ km) aufladen,

wenn auf ihre Oberfläche gleichmäßig eine Ladung von einem Coulomb aufgebracht würde?

12. Wie groß ist die Spannung zwischen zwei Punkten in einem homogenen elektrostatischen Feld der Stärke $E = 150\ \text{V cm}^{-1}$, deren Abstand in Richtung der Feldlinien 6 cm beträgt?
13. Wie groß müßte der Radius einer Kugel sein, die sich durch das Aufbringen einer elektrischen Ladung $Q = 5 \cdot 10^{-6}$ C auf das absolute Potential $U = 100000$ V auflädt?
14. Wie groß ist das absolute Potential in einem Abstand $s = 10$ cm von der Oberfläche einer leitfähigen Kugel mit dem Radius $r = 5$ cm, auf die eine Ladung der Größe $Q = 2 \cdot 10^{-7}$ C gebracht wurde?
15. Es ist die elektrostatische Feldstärke zwischen zwei koaxialen kreiszylindrischen Flächen mit den Radien r_1 und r_2, die praktisch unendlich lang sind, zu berechnen, wenn der innere Zylinder auf das Potential U_0 gegenüber dem geerdeten äußeren Zylinder aufgeladen ist.
16. Ein Leiter, der in die Form einer ebenen Kreislinie mit dem Radius r gebogen wurde, trägt die Ladung Q. Berechnen Sie die Feldstärke des durch diese Ladung erregten elektrostatischen Feldes für

    a) den Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius r,

    b) einen Punkt auf der zur Kreislinie senkrechten Mittelpunktsachse, der vom Mittelpunkt den Abstand s hat.
17. Es sind die Potentiale U_1, U_2, U_3, U_4 in vier nebeneinander gelegenen Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, bekannt. Wie bestimmen wir die Feldstärke im ersten dieser Punkte, der von den drei anderen mit bekanntem Potential jeweils die Abstände x_{12}, x_{13}, x_{14} hat, wenn wir mit $\vec{e}_{12}$, $\vec{e}_{13}$, $\vec{e}_{14}$ die Einheitsvektoren jeweils in den Richtungen von Punkt 1 zu den Punkten 2, 3 und 4 bezeichnen?
18. Ein Punkt A hat von einer unendlich ausgedehnten, leitenden ebenen Fläche, die mit einer Ladung der Flächendichte σ aufgeladen und von Vakuum umgeben ist, den Abstand d. Wie groß ist das Potential des elektrischen Feldes im Punkt A in bezug auf die geladene ebene Fläche?
19. Eine ebene Platte der Fläche A ist mit einer elektrischen Ladung der Größe $+2\,e$ aufgeladen. Ihr gegenüber befindet sich im Abstand d eine zweite von gleicher Größe, die, von der ersten durch ein Vakuum getrennt, die Ladung $+e$ trägt. Wie groß ist das Potential der erstgenannten Platte gegenüber der zweiten?
20. Auf einem kugelförmigen Leiter mit dem Radius $r = 10$ cm befindet sich eine elektrische Ladung der Größe $Q = 60\ \mu$C. Bestimmen Sie die Radien der Äquipotentialflächen des durch diese Ladung erregten elektrischen Feldes, deren Potentiale sich um jeweils $1 \cdot 10^5$ V unterscheiden. Als erste Äquipotentialfläche betrachten wir die Oberfläche des Leiters selbst.
21. Berechnen Sie die auf der Erdoberfläche enthaltene Gesamtladung und deren Flächendichte, wenn der Potentialgradient des elektrischen Feldes der Erdatmosphäre an der Erdoberfläche den Wert $100\ \text{V m}^{-1}$ hat. Der Erdradius beträgt 6378 km.
22. Die Platten eines Kondensators sind durch eine Porzellanscheibe von 0,5 cm Dicke und eine Luftschicht gleicher Dicke voneinander isoliert. Es sind die elektrostatischen Feldstärken in der Luft und im Porzellan ($\varepsilon_r = 6$) zu berechnen, wenn bekannt ist, daß die Potentialdifferenz der Kondensatorplatten 10 kV beträgt. Wie groß ist die Spannung in der Luftschicht und in der Porzellanscheibe?

23. Zwei Platten eines Kondensators haben den Abstand $d = 1{,}05$ cm. Zwischen beide Platten bringen wir, parallel zu beiden liegend, eine weitere Metallscheibe der Dicke $\Delta = 0{,}05$ cm, die von der nächstgelegenen Kondensatorplatte den Abstand $d_1 = 0{,}4$ cm haben soll. Das Potential der nächstgelegenen Kondensatorplatte habe den Wert $U_1 = +50$ V, das der anderen den Wert $U_2 = -60$ V. Berechnen Sie das Potential der eingeschobenen Metallscheibe.
24. Welche Kraft wirkt auf ein Elektron im homogenen elektrischen Feld zwischen zwei Kondensatorplatten, die im Abstand $d = 1$ cm angeordnet sind und zwischen denen eine Spannung $U = 10000$ V besteht?
25. Welche Arbeit muß verrichtet werden, um eine Elektrizitätsmenge $Q = 5$ C von einem Punkt des Potentials $U_1 = -5$ V zu einem anderen mit dem Potential $U_2 = +5$ V zu übertragen?
26. Welche Arbeit wird gewonnen, wenn eine Ladung $Q = 4$ C auf einem Wege verschoben wird, zwischen dessen Endpunkten eine Potentialdifferenz von $U = 6$ V besteht?
27. Welche Arbeit verrichten die Kräfte eines homogenen elektrostatischen Feldes der Feldstärke $E = 200000 \text{ V m}^{-1}$, wenn in ihm eine Ladung $Q = 4$ C in Richtung der Feldlinien um einen Weg $s = 0{,}3$ m verschoben wird?
28. Welche Arbeit muß verrichtet werden, um in einem homogenen elektrostatischen Feld der Stärke $E = 200000 \text{ V m}^{-1}$ eine Ladung $Q = 5$ C längs eines Weges $s = 0{,}15$ m zu verschieben, wenn der Weg mit der Richtung der Feldlinien den Winkel $\varphi = 45°$ einschließt?
29. Wie groß ist die auf das Unendliche bezogene potentielle Energie einer Ladung $Q_2 = 2 \cdot 10^{-7}$ C, die von einer anderen Ladung $Q_1 = 3 \cdot 10^{-7}$ C den Abstand $s = 4$ cm hat?
30. Um das Wievielfache verändert sich die zwischen zwei Kondensatorplatten wirkende Anziehungskraft, wenn statt Vakuum Äthylalkohol ($\varepsilon_r = 26$) zwischen ihnen ist?
31. Welche Kapazität hat der Erdkörper, dessen Radius die Größe $r = 6378$ km hat?
32. Welche Kapazität hat ein Körper, der sich durch die Ladung $Q = 0{,}5$ C auf ein Potential $U = 3000$ V auflädt? Welchen Radius hat eine Kugel der gleichen Kapazität, wenn das umgebende Medium ein Vakuum ist?
33. Ein Leiter der Kapazität $C = 1$ µF wird mit einer Ladung $Q = 100 \cdot 10^{-6}$ C aufgeladen. Wie groß ist sein Potential?
34. Wie groß ist die Kapazität eines Plattenkondensators der Flächengröße $A = 200 \text{ cm}^2$, zwischen dessen Belägen Glas der Dicke $d = 0{,}2$ cm und der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 7$ liegt?
35. Wie groß muß die Belagfläche eines Plattenkondensators sein, zwischen dessen Platten sich als Dielektrikum eine Glasschicht von 0,1 cm Dicke befindet, damit der Kondensator eine Kapazität von 150 pF hat? Die Dielektrizitätszahl des Glases ist $\varepsilon_r = 7$.
36. Eine Leydener Flasche hat folgende Abmessungen: äußerer Bodendurchmesser $d = 15$ cm, Höhe der Beläge $h = 20$ cm, Dicke der Glaswand $d_1 = 0{,}2$ cm. Berechnen Sie die Kapazität dieser Leydener Flasche gemäß der für den Plattenkondensator angegebenen Formel. (Da die Dicke der Glaswandung gegenüber dem Flaschendurchmesser vernachlässigt werden kann, ist es nicht erforderlich, die genauere Formel des Zylinderkondensators anzuwenden.)
37. Ein Kondensator besteht aus drei Metallplättchen, deren jedes eine Fläche von 6 cm² hat. Die Plättchen sind durch zwei Glimmerschichten getrennt, die je eine Dicke von 0,01 cm haben. Die

beiden außen liegenden Metallplättchen sind leitend miteinander verbunden. Die Dielektrizitätszahl des Glimmers ist $\varepsilon_r = 7$. Welche Kapazität hat der solcherart aufgebaute Kondensator?

38. Wie groß ist die Kapazität eines Kondensators, der aus $n = 20$ Platten besteht, die auf einer Fläche von $20\,\text{cm}^2$ Inhalt so übereinanderliegen, daß zwischen jeweils zweien ein Vakuumspalt von 0,1 cm Dicke bleibt?
39. Zwei Leydener Flaschen mit den Kapazitäten $C_1 = 300\,\text{pF}$ und $C_2 = 500\,\text{pF}$ haben hintereinandergeschaltet eine Spannung von $U = 12000\,\text{V}$. Berechnen Sie die auf die erste und auf die zweite Flasche entfallenden Spannungsanteile.
40. Ein Kondensator der Kapazität $C = 1\,\mu\text{F}$ ist auf eine Spannung $U = 200\,\text{V}$ aufgeladen. Bestimmen Sie den Energieinhalt des elektrischen Feldes dieses Kondensators.
41. Eine Kugel mit dem Radius r trägt die elektrische Ladung Q. Sie hat im Vakuum eine bestimmte potentielle Energie. Es ist zu untersuchen, wie sich die potentielle Energie der Kugel verändert, wenn sie in eine Flüssigkeit mit der Dielektrizitätszahl ε_r gebracht wird.
42. Zwei Kondensatoren mit $C_1 = 1\,\mu\text{F}$ und $C_2 = 10\,\mu\text{F}$ sind in Serie geschaltet. An die Klemmen der Kondensatorbatterie wird eine Spannung $U = 200\,\text{V}$ angelegt. Wie groß ist der Energieinhalt jedes Kondensators?
43. Welche elektrische Energie ist in einem Volumen von einem Kubikkilometer der Erdatmosphäre enthalten, wenn der Gradient des elektrischen Erdfeldes den Wert $10^4\,\text{V}\,\text{m}^{-1}$ aufweist?

1.2. Elektrodynamik

Unter dem Begriff **elektrischer Strom** I verstehen wir diejenige Elektrizitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch einen Leiterquerschnitt fließt,

$$I = \frac{Q}{t} \quad \text{bzw.} \quad I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t},$$

wobei $\mathrm{d}Q$ die infinitesimale Elektrizitätsmenge darstellt, die in der gleichfalls infinitesimalen Zeit $\mathrm{d}t$ durch den Leiterquerschnitt fließt.
Der Ausdruck

$$\mathrm{d}I = \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{A}$$

bedeutet diejenige Elektrizitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch ein infinitesimales Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}$ senkrecht zu seiner Orientierung fließt, wobei das Symbol $\vec{I}$ den sog. **Vektor der Stromdichte** darstellt. Wenn beide Vektoren in die gleiche Richtung weisen, kann man die Stromdichte aus der Beziehung berechnen:

$$J = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A}.$$

Wenn die Dichte im gesamten, vom Strom I durchflossenen Querschnitt A gleich groß ist, dann gilt

$$J = \frac{I}{A}.$$

Nach dem **Ohmschen Gesetz** gilt:

Der elektrische Strom I, der durch einen Leiter fließt, ist gleich dem Quotienten aus der Potentialdifferenz $U_1 - U_2$ (der Spannung U) an den Leiterenden und dem elektrischen Widerstand des Leiters:

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R} = \frac{U}{R}.$$

Der **elektrische Widerstand eines Leiters** hängt von seinen geometrischen Abmessungen (der Länge l und dem Querschnitt A) und dem spezifischen Widerstand ϱ gemäß folgender Beziehung ab:

$$R = \varrho \frac{l}{A}.$$

Nach den SI-Einheiten (Einheiten des „Système International d'Unités") hat der spezifische Widerstand ϱ die Maßeinheit Ω m. Dagegen setzte sich in der Praxis die Gewohnheit durch, die Länge l in Metern und den Querschnitt A in Quadratmillimetern (mm^2) anzugeben. Da auch in diesem Fall der Widerstand R in Ω angegeben werden muß, folgt für den spezifischen Widerstand die Maßeinheit $\Omega\,\text{mm}^2\,\text{m}^{-1}$.
Die Abhängigkeit des elektrischen Widerstands eines Leiters von der herrschenden Temperatur wird innerhalb eines nicht allzu breiten Temperaturbereichs mit ausreichender Genauigkeit durch die Beziehung dargestellt:

$$R_t = R_0[1 + \alpha(t - t_0)]$$

(R_t Widerstand bei der Temperatur t, R_0 Widerstand bei der Temperatur t_0 und α Temperaturkoeffizient).

Unter der **Quellenspannung** U_{12} (auch elektromotorische Kraft, EMK) verstehen wir den Wert des Integrals

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E}_i \,\mathrm{d}s,$$

wobei $\vec{E}_i$ die elektrische Feldstärke bedeutet. Die Integration wird längs des Weges vorgenommen, auf dem die Quellenspannung bestimmt werden soll. Die Quellenspannung einer offenen Spannungsquelle (einer Spannungsquelle, aus der kein elektrischer Strom entnommen wird) ist ihrer elektrischen Spannung gleich.

Zur Behandlung komplizierter elektrischer Stromkreise verwenden wir die **Kirchhoffschen Gesetze.**

Das 1. KIRCHHOFFsche Gesetz besagt:

In jedem Verzweigungspunkt eines Leiternetzes ist die algebraische Summe aller Ströme gleich Null, also

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0.$$

Das 2. KIRCHHOFFsche Gesetz besagt:

In jedem geschlossenen Kreis eines Leiternetzes ist die Summe der Quellenspannungen gleich der Summe der Spannungsabfälle in diesem Kreis, also

$$\sum_{k=1}^{m} U_k = \sum_{k=1}^{m} I_k R_k.$$

Bei der Bearbeitung der konkreten Beispiele werden wir uns an die folgenden Abmachungen halten:

1. Wir zeichnen den Richtungspfeil des Stroms so ein, wie er wahrscheinlich fließen wird. Wenn sich aus unserer Berechnung ein negativer Strom ergibt, so bedeutet das, daß der Strom entgegengesetzt zu der von uns gewählten Richtung fließt.
2. Wir wählen die positive Umlaufrichtung eines Stromkreises beliebig.
3. Wir geben jeweils die Richtung der Quellenspannung an. In einer Gleichung wird die Quellenspannung dann positiv sein, wenn die Umlaufrichtung des Kreises und die Richtung der Quellenspannung gleich sind.
4. Bei der Addition der ohmschen Spannungen wird sich dann ein positives Vorzeichen ergeben, wenn die Umlaufrichtung des Kreises und die Richtung des Stroms, der den ohmschen Widerstand hervorruft, übereinstimmen.

Bei der Serienschaltung von ohmschen Widerständen gilt für den resultierenden Widerstand

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i.$$

Dagegen gilt bei der Parallelschaltung der ohmschen Widerstände für den resultierenden Widerstand

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i},$$

d.h.,

$$R = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}.$$

Die **Arbeit**, die beim Durchgang des elektrischen Stromes I durch einen Leiter in der infinitesimalen Zeitspanne $\mathrm{d}t$ verrichtet wird, ist, wenn an den Leiterenden die Spannung U besteht, durch die Beziehung gegeben:

$$\mathrm{d}W = UI\,\mathrm{d}t.$$

Bei konstanter Spannung U und konstanter Stromstärke I können wir für die Arbeit auch schreiben

$$W = UIt.$$

Für die **Leistung** eines Stromes I, der durch einen Widerstand R fließt, an dessen Enden die Spannung U besteht, gilt

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = UI = \frac{U^2}{R} = I^2R.$$

Die Wärmeaufnahme eines Leiters, der vom Strom durchflossen wird, können wir durch Umrechnen der Stromarbeit

$$W = UIt$$

bestimmen.

Die Menge des durch Elektrolyse an einer Elektrode ausgeschiedenen Stoffes ist entsprechend dem **Faradayschen Gesetz** durch

$$m = \ddot{A}Q = \ddot{A}It$$

gegeben (m Masse des ausgeschiedenen Stoffes, Q die durch den Elektrolyten fließende Ladung, I die Stromstärke und t die Dauer des Elektrolyseprozesses). Das **elektrochemische Äquivalent** $\ddot{A}$ des betreffenden Stoffes wird in kg $A^{-1}s^{-1}$ angegeben.

Wenn das elektrochemische Äquivalent eines Stoffes nicht angegeben ist, können wir es mit Hilfe des zweiten FARADAYschen Gesetzes aus

$$k = \frac{\alpha}{\nu}\,\frac{1}{F}$$

berechnen (α/ν das Verhältnis der Molmasse und der Wertigkeit des Elements bzw. der Molmasse und der Wertigkeit des Radikals, $F = 96494$ C die sog. **Faraday-Konstante**).

Unter dem Begriff **Klemmenspannung** U verstehen wir die Potentialdifferenz an den Klemmen eines galvanischen Elements (der Quelle der EMK), wenn ihm der Strom I

entnommen wird, also

$$U = U_{12} - R_i I,$$

(U_{12} Quellenspannung eines Elements, R_i innerer Widerstand).

B Beispiele

27. Welche Menge an elektrischer Ladung Q fließt während der Zeitspanne $t = 10$ s durch einen Leiter, wenn
a) der Strom den konstanten Wert $I = 5$ A hat,
b) der Strom gleichmäßig vom Wert Null auf den Endwert von 3 A steigt?

Lösung

a) In Übereinstimmung mit der Definition der Stromstärke können wir schreiben

$$Q = It = 5\,\text{A} \cdot 10\,\text{s} = \underline{\underline{50\,\text{C}}}.$$

b) Die infinitesimale elektrische Ladung dQ, die während der Zeit dt durch einen Leiter fließt, ist bei einem Strom I

$$\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t,$$

wobei I eine lineare Zeitfunktion $I = kt$ (Bild 15) darstellt, in der

$$k = \frac{3\text{A}}{10\,\text{s}} = 0{,}3\,\text{A}\,\text{s}^{-1}$$

ist. Nach Einsetzen dieser Größe in den Ausdruck für dQ erhalten wir

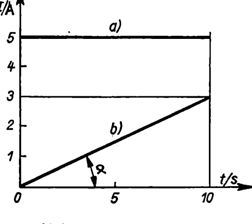


Bild 15

$$\mathrm{d}Q = kt\,\mathrm{d}t$$

und durch Integration

$$Q = k\int_0^{10\,\text{s}} t\,\mathrm{d}t = \frac{k}{2}\,[t^2]_0^{10\,\text{s}} = \frac{0{,}3\,\text{A}\,\text{s}^{-1}}{2}\,10^2\,\text{s}^2 = \underline{\underline{15\,\text{C}}}.$$

28. Ein Akkumulator wird in der Zeit $t_l = 10$ h mit dem Strom der Stärke $I_l = 7$ A aufgeladen. Wie lange dauert seine Entladung, wenn ihm kontinuierlich ein Entladestrom $I_e = 0{,}5$ A entnommen wird und wenn wir den Wirkungsgrad des Akkus mit 100% annehmen?

Lösung

Die Berechnung setzt voraus, daß wir wegen des 100%igen Wirkungsgrades des Akkus die beim Aufladen zugeführte elektrische Ladung im Entladevorgang wieder zurück-

erhalten. Es gilt also

$$I_1 t_1 = I_e t_e .$$

Demnach finden wir für die gesamte Entladungszeit des Akkus

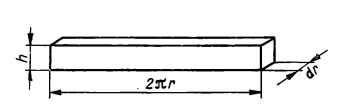
$$t_e = t_1 \frac{I_1}{I_e} = \underline{140\ \mathrm{h}.}$$

29. Aus einer Platte von sehr geringer Dicke h, die aus einem Werkstoff mit dem spezifischen Widerstand ϱ gefertigt wurde, wird ein Kreisring mit dem Innenradius r_1 und dem Außenradius r_2 herausgeschnitten. Wie groß ist der Widerstand dieses Kreisrings, wenn wir
a) den Kreisring auseinanderschneiden und als Zuführung die beiden Schnittränder belassen und wenn
b) als Stromzuführungen die beiden begrenzenden Kreislinien benutzt werden?

Lösung

a) Wenn wir den Kreisring radial aufschneiden und als Zuführung die Schnittränder verwenden (Bild 16), dann hat das dort dargestellte differentielle Leiterelement die Länge $2\pi r$ und den Querschnitt $h\,\mathrm{d}r$. Sein elektrischer Leitwert ist dann

$$\mathrm{d}G = \frac{1}{\mathrm{d}R} = \frac{1}{\varrho \dfrac{2\pi r}{h\,\mathrm{d}r}} = \frac{h\,\mathrm{d}r}{\varrho 2\pi r}.$$



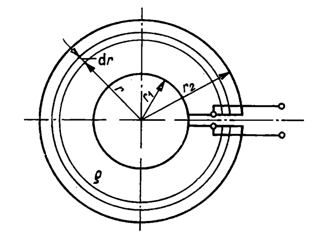


Bild 16

Durch Integration erhalten wir den gesamten Leitwert des Kreisrings

$$G = \frac{h}{2\pi\varrho} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{h}{2\pi\varrho} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Als Widerstand des angegebenen Kreisrings erhalten wir dann den reziproken Wert des Leitwerts

$$\underline{R = \frac{1}{G} = \frac{2\pi\varrho}{h} \frac{1}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}.}$$

b) Zunächst ermitteln wir den Widerstand des infinitesimalen Kreisrings wie in Bild 17. Es ist dies der Widerstand eines Leiters der Länge dr und der Querschnittsfläche $2\pi rh$

$$\mathrm{d}R = \varrho \frac{\mathrm{d}r}{2\pi rh}.$$

Den Gesamtwiderstand erhalten wir durch Integration von r_1 bis r_2:

$$R = \frac{\varrho}{2\pi h} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\varrho}{2\pi h} (\ln r_2 - \ln r_1) = \underline{\frac{\varrho}{2\pi h} \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

30. Berechnen Sie den Temperaturkoeffizienten für den Widerstand eines Leiters, der sich aus einem Aluminiumdraht mit dem Widerstand $R_{10} = 3\ \Omega$ ($\alpha_1 = 4{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$) und aus einem Eisendraht mit dem Widerstand $R_{20} = 2\ \Omega$ ($\alpha_2 = 6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$) zusammensetzt, indem beide Drähte hintereinandergeschaltet sind. (Die angegebenen Widerstandswerte beziehen sich auf eine Temperatur von 0 °C.)

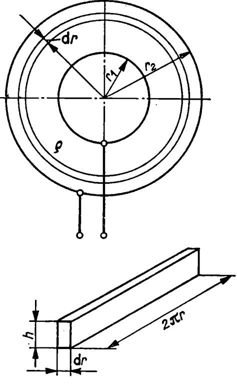


Bild 17

Lösung

Die hintereinandergeschalteten Widerstände aus Aluminium R_{10} und aus Eisen R_{20} ergeben bei einer Temperatur von 0 °C einen resultierenden Widerstand R_0 gemäß

$$R_0 = R_{10} + R_{20}.$$

Beim Ansteigen der Temperatur um den Wert Δt können wir für denselben resultierenden Widerstand auch schreiben

$$R = R_1 + R_2,$$

wobei R_1 und R_2 die Widerstände des Aluminium- bzw. des Eisendrahtes nach Eintreten einer Temperaturerhöhung um den Wert Δt darstellen. Wir können daher auch schreiben

$$R_0(1 + \alpha\Delta t) = R_{10}(1 + \alpha_1\Delta t) + R_{20}(1 + \alpha_2\Delta t),$$

d. h.,

$$R_0 + R_0\alpha\Delta t = R_{10} + R_{10}\alpha_1\Delta t + R_{20} + R_{20}\alpha_2\Delta t.$$

Da die Summe der Widerstände $R_{10} + R_{20}$ auf der rechten Seite der Gleichung gleich dem Widerstand R_0 auf der linken Seite ist, können wir weiterhin schreiben

$$R_0\alpha\Delta t = R_{10}\alpha_1\Delta t + R_{20}\alpha_2\Delta t.$$

Daraus ergibt sich dann

$$\alpha = \frac{R_{10}\alpha_1 + R_{20}\alpha_2}{R_0} = \frac{3\ \Omega \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1} + 2\ \Omega \cdot 6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}}{(3 + 2)\ \Omega} =$$

$$= \underline{4{,}92 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}}.$$

31. Zwei Stäbchen von gleichem Durchmesser, das eine aus Kohlenstoff ($\varrho_C = 4 \cdot 10^{-3}\ \Omega$cm, $\alpha_C = -8 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}$) und das andere aus Eisen ($\varrho_{Fe} = 12 \cdot 10^{-6}\ \Omega$ cm, $\alpha_{Fe} = 6 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}$), sind miteinander verbunden. Es ist das Verhältnis beider Längen zu ermitteln, bei dem die so gebildete Kombination einen temperaturunabhängigen Widerstand hat.

Lösung

Da beide Stäbchen hintereinandergeschaltet sind, addieren sich ihre Widerstände. Unter der angegebenen Voraussetzung, daß sich der resultierende Widerstand mit der Temperatur nicht verändert, kann man die Summe der Widerstände bei einer beliebigen Temperatur und die Summe der Widerstände bei einer Temperatur von 0 °C gleichsetzen (die Indizes bedeuten C für Kohlenstoff, Fe für Eisen), so daß sich ergibt

$$R_c(1 + \alpha_c \Delta t) + R_{Fe}(1 + \alpha_{Fe} \Delta t) = R_c + R_{Fe},$$

d. h.,

$$R_c + R_{Fe} + R_c \alpha_c \Delta t + R_{Fe} \alpha_{Fe} \Delta t = R_c + R_{Fe}.$$

Nach einer Vereinfachung der Gleichung drücken wir die Widerstände des Kohlenstoffs R_C und des Eisens R_{Fe} mit Hilfe der spezifischen Widerstände ϱ_C, ϱ_{Fe}, der Längen s_C, s_{Fe} und der Querschnitte $A_C = A_{Fe} = A$ aus:

$$\varrho_c \frac{s_c}{A} \alpha_c \Delta t = -\varrho_{Fe} \frac{s_{Fe}}{A} \alpha_{Fe} \Delta t.$$

Aus dieser Gleichung entnehmen wir das Längenverhältnis

$$\frac{s_{Fe}}{s_c} = -\frac{\varrho_c}{\varrho_{Fe}} \frac{\alpha_c}{\alpha_{Fe}} = -\frac{4 \cdot 10^{-3}\ \Omega\ \mathrm{cm}\ (-8 \cdot 10^{-3})\ K^{-1}}{12 \cdot 10^{-6}\ \Omega\ \mathrm{cm} \cdot 6 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}} = \frac{32 \cdot 10^{-6}}{72 \cdot 10^{-9}} = \underline{444.}$$

Die Eisenstange muß 444mal so lang wie das Stäbchen aus Kohlenstoff sein.

32. Ein Normalwiderstand wurde so hergestellt, daß sein Wert genau 0,102 Ω beträgt. Durch Anschließen eines geeigneten Nebenschlußwiderstands soll er auf den exakten Wert von 0,1 Ω einreguliert werden. Welcher Nebenschlußwiderstand wird dazu erforderlich sein?

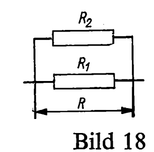


Bild 18

Lösung

Wir gehen von der Beziehung für die Parallelschaltung von Widerständen aus, wonach gilt (Bild 18):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2};$$

daraus folgt

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}} = \frac{1}{\frac{R_1 - R}{R R_1}} = \frac{R R_1}{R_1 - R} = \frac{0{,}1\ \Omega \cdot 0{,}102\ \Omega}{0{,}102\ \Omega - 0{,}1\ \Omega} = \underline{5{,}1\ \Omega.}$$

33. Der Gesamtwiderstand zweier parallelgeschalteter Leiter beträgt $^1/_7\,\Omega$. Wenn wir die beiden Leiter hintereinanderschalten, so ergibt sich ein resultierender Widerstand von 0,7 Ω. Berechnen Sie den Widerstand jedes der beiden Leiter.

Lösung

Für die Parallelschaltung der beiden Widerstände R_1 und R_2 gilt

$$\frac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}} = \frac{1}{7}\,\Omega, \tag{1}$$

und für die gleichen, in Serie geschalteten Widerstände gilt

$$R_1 + R_2 = 0{,}7\,\Omega. \tag{2}$$

Aus (1) folgt

$$R_1 = \frac{R_2}{7\,\Omega^{-1}R_2 - 1}.$$

Das erlaubt uns die Eliminierung von R_1 in (2):

$$\frac{R_2}{7\,\Omega^{-1}R_2 - 1} + R_2 = 0{,}7\,\Omega.$$

Nach einer Umformung erhalten wir für R_2 die quadratische Gleichung

$$10R_2^2\,\Omega^{-2} - 7R_2\,\Omega^{-1} + 1 = 0$$

mit den Lösungen

$$(R_2)_{1,2} = \begin{cases} 0{,}5\,\Omega \\ 0{,}2\,\Omega \end{cases}.$$

Für R_1 erhalten wir gleichfalls zwei Wurzeln, und zwar $(R_1)_{1,2} = 0{,}2\,\Omega;\ 0{,}5\,\Omega$. Die gesuchten Widerstände sind demnach 0,2 Ω und 0,5 Ω.

34. Berechnen Sie den Widerstand eines Drahtgestells, das die Form eines Rechtecks mit den Seiten a und b hat und das diagonal durchströmt wird (Bild 19a), indem der Strom von dem einen Eckpunkt A zum gegenüberliegenden B fließt. Der Widerstand einer Längeneinheit des verwendeten Drahtes ist durch den Wert γ gegeben.

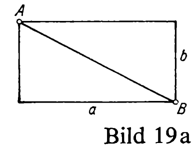


Bild 19a

Lösung

Da wir den Widerstand zwischen den beiden Punkten A und B berechnen wollen, kann man die Situation in Bild 19a vereinfacht wie in Bild 19b darstellen. Die angeführten Widerstände R_1, R_2, R_3 sind also parallel zueinander geschaltet, so daß sich der resultierende Widerstand R errechnen läßt aus

$$R = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}} = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}.$$

Wenn wir die Ausdrücke für R_1, R_2 und R_3 in die letztgenannte Beziehung einsetzen, ergibt sich

$$R = \frac{\gamma(a+b)\gamma\sqrt{a^2+b^2}\,\gamma(a+b)}{\gamma^2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+\gamma^2(a+b)^2+\gamma^2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$= \gamma\frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b)+2\sqrt{a^2+b^2}}$$

A

$R_1 = \gamma(a+b)$
$R_2 = \gamma\sqrt{a^2+b^2}$
$R_3 = \gamma(a+b)$

B

Bild 19b

35. Das Gerüst eines Würfels setzt sich aus gleich großen Widerständen vom Wert $R_0 = 6\,\Omega$ so zusammen, daß jede Kante des Würfels einen solchen Widerstand darstellt. Berechnen Sie den Widerstand R zwischen den beiden gegenüberliegenden Würfelecken A und B gemäß Bild 20a.

Lösung

Der Würfel stellt ein räumliches Gebilde dar. Wenn wir ihn nach Bild 20b auf eine ebene Darstellung umskizzieren, dann wird ersichtlich, daß wir in Hinsicht auf Stromverzweigung und Widerstandsverteilung ein symmetrisches Gebilde erhalten. Der in die

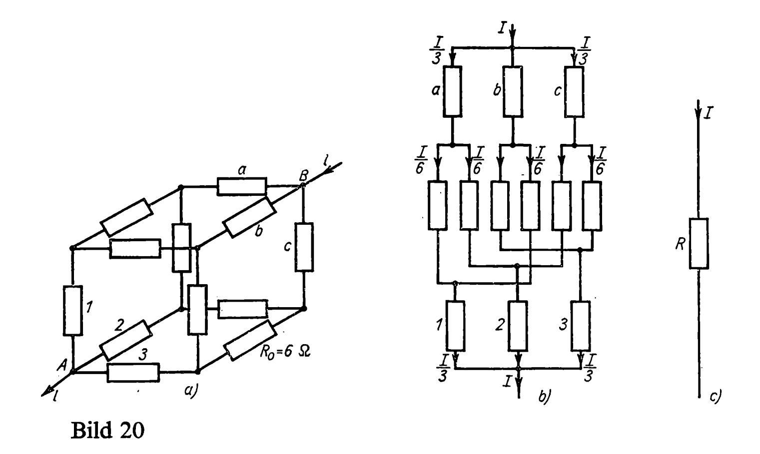


Bild 20

Widerstände a, b, c eintretende Strom I verzweigt sich dreimal auf jeweils $I/3$ und danach nochmals sechsfach auf je $I/6$. Beim Austritt aus dem Würfel vereinigen sich die Zweigströme wieder auf dreimal $I/3$. Die Berechnung des zwischen den beiden Würfelecken resultierenden Widerstands gründen wir auf die Überlegung, daß die Leistung eines beliebigen Stroms I, der durch eine Kombination von Widerständen fließt, ebenso groß sein muß wie die desselben Stroms, der durch einen Ersatzwiderstand R fließt (Bild 20c).

Wegen des Umstands, daß der Strom $I/3$ durch 6 Widerstände und der Strom $I/6$ ebenfalls durch 6 Widerstände fließt, können wir schreiben (Bild 20b)

$$RI^2 = 6R_0 \left(\frac{I}{3}\right)^2 + 6R_0 \left(\frac{I}{6}\right)^2,$$

d. h.,

$$RI^2 = \frac{6R_0I^2}{9} + \frac{6R_0I^2}{36}.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir den resultierenden Widerstand

$$R = \frac{2}{3} R_0 + \frac{1}{6} R_0 = \frac{5}{6} \cdot 6\,\Omega = \underline{5\,\Omega.}$$

36. In einer Schaltung (Bild 21) ist der Strom I zu bestimmen, wenn $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$, $R_4 = 10\Omega$, $R_5 = 10\,\Omega$ und $U = 24$ V betragen. Der innere Widerstand der Stromquelle ist zu vernachlässigen.

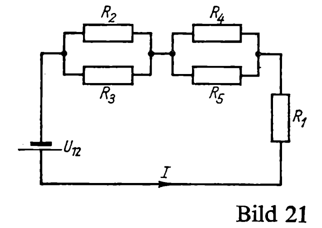


Bild 21

Lösung

Wir setzen die einzelnen Gruppen der parallelen Widerstände des Stromkreises zusammen, wodurch wir erhalten

$$R' = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} = \frac{5\,\Omega \cdot 10\,\Omega}{5\,\Omega + 10\,\Omega} = \frac{50}{15}\,\Omega = 3{,}33\,\Omega,$$

$$R'' = \frac{R_4R_5}{R_4 + R_5} = \frac{10\,\Omega \cdot 10\,\Omega}{10\,\Omega + 10\,\Omega} = \frac{100}{20}\,\Omega = 5\,\Omega.$$

Die Widerstände R', R'' und R_1 sind in Serie geschaltet. Daher wird der Widerstand dieses Kreises

$$R = R' + R'' + R_1 = 3{,}33\,\Omega + 5\,\Omega + 10\,\Omega = 18{,}33\,\Omega.$$

Für den Strom I erhalten wir damit

$$I = \frac{U}{R} = \frac{24\text{ V}}{18{,}33\,\Omega} = \underline{1{,}31\text{ A.}}$$

37. Ein Gleichstrommotor nimmt den Strom $I = 10$ A auf und benötigt zu seinem Betrieb eine Spannung von 220 V. Welche Spannung U_0 muß man am Leitungsanfang haben, wenn der Gesamtwiderstand der Zuleitung den Wert $R = 1\,\Omega$ annimmt?

Lösung

Die am Leitungsanfang anliegende Spannung muß nicht nur die für den Betrieb des Motors notwendige Größe U haben, sondern auch den durch die Zuleitung bedingten

Spannungsabfall berücksichtigen (Bild 22):

$$U_0 = U_m + RI = 220\,\text{V} + 1\,\Omega \cdot 10\,\text{A} = \underline{230\,\text{V}}.$$

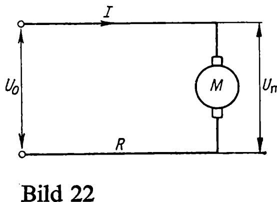


Bild 22

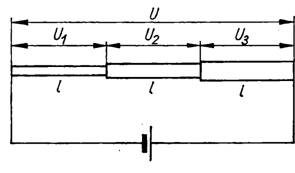


Bild 23

38. Ein elektrischer Stromkreis enthält drei Leiter gleicher Länge l, die, aus gleichem Material bestehend, hintereinandergeschaltet sind (Bild 23). Die Querschnitte der drei Leiter sind $A_1 = 1\,\text{mm}^2$, $A_2 = 2\,\text{mm}^2$, $A_3 = 3\,\text{mm}^2$. Die Potentialdifferenz an den Enden des Systems beträgt $U = 12\,\text{V}$. Bestimmen Sie den Spannungsabfall in jedem einzelnen Leiter.

Lösung

Es ist zunächst der Widerstand der einzelnen Leiter aus der Beziehung zwischen geometrischen Größen (l, A) und dem spezifischen Widerstand ϱ zu bestimmen:

$$R_1 = \varrho\frac{l}{A_1}; \quad R_2 = \varrho\frac{l}{A_2}; \quad R_3 = \varrho\frac{l}{A_3}.$$

Der Gesamtwiderstand aller drei in Serie geschalteten Leiter ist demnach

$$R = \varrho\frac{l}{A_1} + \varrho\frac{l}{A_2} + \varrho\frac{l}{A_3} = \varrho l\left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3}\right) =$$

$$= \varrho l\frac{A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3}{A_1A_2A_3}.$$

Durch jeden Leiter fließt gemäß Bild 112 der Strom

$$I = \frac{U}{R} = \frac{UA_1A_2A_3}{\varrho l(A_1A_2 + A_2A_3 + A_1A_3)}.$$

Die Spannungsabfälle (ohmsche Verluste) längs der einzelnen Leiter sind entsprechend dem OHMschen Gesetz durch die folgende Beziehung gegeben:

$$U_1 = R_1I = \frac{\varrho l}{A_1}\,\frac{UA_1A_2A_3}{\varrho l(A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3)} = \frac{1}{A_1}\,\frac{UA_1A_2A_3}{A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3},$$

$$U_1 = \frac{1}{1\,\text{mm}^2}\,\frac{12\,\text{V} \cdot 1\,\text{mm}^2 \cdot 2\,\text{mm}^2 \cdot 3\,\text{mm}^2}{1\,\text{mm}^2 \cdot 2\,\text{mm}^2 + 1\,\text{mm}^2 \cdot 3\,\text{mm}^2 + 2\,\text{mm}^2 \cdot 3\,\text{mm}^2} =$$

$$= \frac{72\,\text{V}}{11} = \underline{6{,}545\,\text{V}},$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\,\frac{72}{11}\,\text{V} = \frac{36}{11}\,\text{V} = \underline{3{,}273\,\text{V}}, \quad U_3 = \frac{1}{3}\,\frac{72}{11}\,\text{V} = \frac{24}{11}\,\text{V} = \underline{2{,}182\,\text{V}}.$$

39. Zwei Elemente haben je eine Quellenspannung von 1,5 V und einen inneren Widerstand $R_i = 1{,}4\ \Omega$. Sie sollen so miteinander verbunden werden, daß sie an einen Stromkreis mit dem Widerstand $R = 0{,}2\ \Omega$ einen möglichst großen Strom abgeben können.

Lösung

Bei einer Serienschaltung wird die Quellenspannung der gesamten Batterie

$$U_{12B} = 2U_{12},$$

und der innere Widerstand wird

$$R_{Bi} = 2R_i.$$

Es ergibt sich demnach ein Strom

$$I = \frac{2U_{12}}{2R_i + R} = \frac{2 \cdot 1{,}5\ \text{V}}{2 \cdot 1{,}4\ \Omega + 0{,}2\ \Omega} = 1\ \text{A}.$$

Bei einer Parallelschaltung ergeben sich die folgenden Verhältnisse:

$$U_{12B} = U_{12}, \quad R_{Bi} = \frac{R_i}{2},$$

$$I = \frac{U_{12}}{\frac{R_i}{2} + R} = \frac{1{,}5\ \text{V}}{0{,}7\ \Omega + 0{,}2\ \Omega} = \underline{1{,}66\ \text{A}}.$$

Es ist also ersichtlich, daß man zur Erfüllung der in der Aufgabe gestellten Bedingung die beiden Elemente parallelschalten muß.

40. Auf welche Höchstspannung lädt sich ein Kondensator C auf, wenn die an das Netz geschaltete konstante Quellenspannung mit dem Wert U_{12} angegeben ist (Bild 24)?

Lösung

Durch den Kreis $U_{12} - R_1 - R_2$ fließt der Strom

$$I = \frac{U_{12}}{R_1 + R_2},$$

der an den Klemmen des Widerstands R_2 (Klemmen $a - b$) die Ohmsche Spannung

$$\underline{U = IR_2 = U_{12} \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

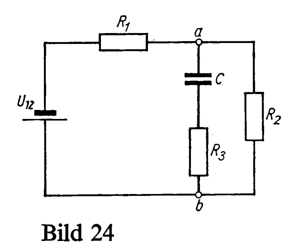


Bild 24

hervorruft. Auf die gleiche Spannung lädt sich auch der Kondensator C auf, da der Widerstand R_3 keinerlei Spannungsverlust bedingt, denn der Kondensator C unterbricht den Stromkreis, so daß zwischen den Klemmen a und b kein Strom fließt.

41. Ein prismatischer Körper aus Retortenkohle vom Querschnitt $bc = 3\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm}$ und einer Länge $a = 10\,\text{cm}$ ist an eine Spannung vom Wert $U = 10\,\text{V}$ angeschlossen (Bild 25). Es ist die elektrische Feldstärke und die Stromdichte im Innern des Prismas zu bestimmen. (Die spezifische Leitfähigkeit der Retortenkohle wird mit $\varkappa = 160\,\Omega^{-1}\,\text{cm}^{-1}$ angegeben.)

Lösung

Die elektrostatische Feldstärke berechnen wir als den auf die Längeneinheit bezogenen Spannungsabfall

$$E = \frac{U}{a} = \frac{10\,\text{V}}{0{,}1\,\text{m}} = \underline{100\,\text{Vm}^{-1}}.$$

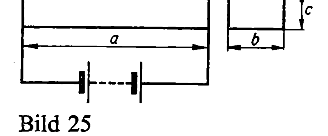


Bild 25

Die Stromdichte ist im Sinne ihrer Definition durch

$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{bc}$$

gegeben. Für den Strom selbst können wir schreiben

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\frac{1}{\varkappa}\frac{a}{bc}} = \frac{\varkappa Ubc}{a}.$$

Für die Stromdichte erhalten wir dann

$$J = \frac{I}{bc} = \frac{\varkappa Ubc}{abc} = \frac{\varkappa U}{a} = \frac{160\,\Omega^{-1}\,\text{cm}^{-1} \cdot 10\,\text{V}}{10\,\text{cm}} = \underline{160\,\text{A}\,\text{cm}^{-2}}.$$

42. Wieviel Trockenbatterien, deren jede eine Quellenspannung von $U_{12} = 4{,}5\,\text{V}$ bei einem inneren Widerstand $R_i = 3\,\Omega$ hat, muß man in Serie schalten, damit ein im Stromkreis enthaltenes Relais mit dem Widerstand $R = 3000\,\Omega$ anspricht, wenn dazu eine Stromstärke des Wertes $I = 0{,}025\,\text{A}$ erforderlich ist?

Lösung

Für den angegebenen Stromkreis können wir entsprechend dem 2. KIRCHHOFFschen Gesetz schreiben

$$nU_{12} = IR + InR_i$$

und nach Umformung

$$n(U_{12} - IR_i) = IR,$$

d. h.,

$$n = \frac{IR}{U_{12} - IR_i} = \frac{0{,}025\,\text{A} \cdot 3000\,\Omega}{4{,}5\,\text{V} - 0{,}025\,\text{A} \cdot 3\,\Omega} = \frac{75}{4{,}5 - 0{,}075} = \underline{16{,}95}.$$

Für die Realisierung der gestellten Aufgabe sind also 17 Trockenbatterien erforderlich.

43. Welchen Widerstand R_L muß man mit einer Akkumulatorenbatterie in Serie schalten, die sich aus $n = 20$ Elementen mit der jeweiligen Quellenspannung $U_{12} = 1{,}9$ V und dem inneren Widerstand $R_i = 0{,}01\ \Omega$ zusammensetzt und die mit einem Gleichstrom der Spannung $U = 110$ V aufgeladen werden soll, wobei der vorgeschriebene Ladestrom den Wert $I = 4$ A annimmt (Bild 26)?

Lösung

Für die Quellenspannung bzw. den inneren Widerstand der gesamten Batterie können wir schreiben

$$U_{12\,g} = nU_{12}, \quad R_{gi} = nR_i.$$

Gemäß dem 2. KIRCHHOFFschen Gesetz gilt für den Stromkreis in Bild 26

$$IR_{gi} + IR_L = U - U_{12\,g}.$$

Daraus erhalten wir den gesuchten Widerstand

$$R_L = \frac{U - U_{12\,g} - IR_{gi}}{I} = \frac{U - nU_{12} - InR_i}{I} =$$

$$= \frac{110\ \text{V} - 20 \cdot 1{,}9\ \text{V} - 4\ \text{A} \cdot 20 \cdot 0{,}01\ \Omega}{4\ \text{A}} = \underline{17{,}8\ \Omega}.$$

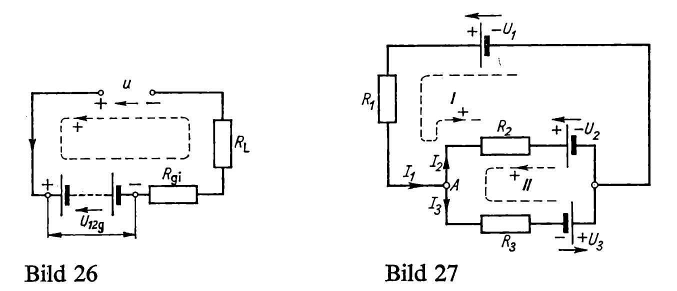


Bild 26 Bild 27

44. Es sind die Ströme in den einzelnen Verzweigungspunkten eines Stromkreises zu berechnen für den Fall, daß $U_1 = 12$ V, $U_2 = 4$ V, $U_3 = 6$ V, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$ und $R_3 = 10\ \Omega$ beträgt (Bild 27).

Lösung

Wir wählen die positive Umlaufrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn für die Schleifen I und II. Weiterhin wählen wir die wahrscheinliche Richtung der Ströme I_1, I_2, I_3 und bezeichnen die positiven Richtungen der Quellenspannung so, daß sie im Kreis einen Strom vom positiven zum negativen Pol hervorrufen. Dann schreiben wir das 2. KIRCHHOFFsche Gesetz so um, daß die Spannungen und die Ströme in der Richtung des gewählten positiven Umlaufs der betreffenden Schleife positiv sind. Das bedeutet für die Schleife I

$$U_1 - U_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2,$$

Schleife II

$$U_2 + U_3 = R_3 I_3 - R_2 I_2,$$

Stromverzweigungspunkt A

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \text{ (1. KIRCHHOFFsches Gesetz)}$$

Wenn wir die vorgegebenen Zahlenwerte einsetzen, ergibt sich:
Schleife I

$$12\,\text{V} - 4\,\text{V} = 20\,\Omega\, I_1 + 12\,\Omega\, I_2,$$

Schleife II

$$4\,\text{V} + 6\,\text{V} = 10\,\Omega\, I_3 - 12\,\Omega\, I_2.$$

In der Beziehung für die Schleife I drücken wir den Strom I_1 mittels I_2, in der Beziehung für Schleife II den Strom I_3 ebenfalls mittels I_2 aus:

$$I_1 = \frac{8\,\text{V} - 12\,\Omega\, I_2}{20\,\Omega} = 0{,}4\,\text{A} - 0{,}6\, I_2,$$

$$I_3 = \frac{10\,\text{V} + 12\,\Omega\, I_2}{10\,\Omega} = 1\,\text{A} + 1{,}2\, I_2$$

und setzen die so erhaltenen Werte in die Beziehung für den Verzweigungspunkt A ein, wodurch wir eine Gleichung zur Bestimmung der unbekannten Größe I_2 erhalten:

$$0{,}4\,\text{A} - 0{,}6\, I_2 - I_2 - (1\,\text{A} + 1{,}2\, I_2) = 0,$$

woraus folgt

$$\underline{I_2 = -0{,}2143\,\text{A}.}$$

Das negative Vorzeichen deutet an, daß der Strom tatsächlich in umgekehrter Richtung fließt, als wir zu Anfang annahmen. Die übrigen Ströme berechnen wir, indem wir den so gewonnenen Wert für I_2 in die entsprechenden Ausdrücke für I_1 und I_3 einsetzen, also

$$I_1 = 0{,}4\,\text{A} - 0{,}6(-0{,}2143)\,\text{A} = \underline{0{,}5286\,\text{A}},$$

$$I_3 = 1\,\text{A} + 1{,}2(-0{,}2143)\,\text{A} = \underline{0{,}7429\,\text{A}}.$$

45. Welchen Wert muß der Widerstand eines Shunts haben, durch den der Meßbereich eines Amperemeters mit dem inneren Widerstand $R = 0{,}2\,\Omega$ auf das $n = 5$fache vergrößert wird?

Lösung

Wir können für den Verzweigungspunkt mit Hilfe des 2. KIRCHHOFFschen Gesetzes schreiben (Bild 28)

$$nI = I + I'.$$

Für die Schleife I gilt entsprechend dem 2. KIRCHHOFFschen Gesetz

$$0 = R_i I - RI'.$$

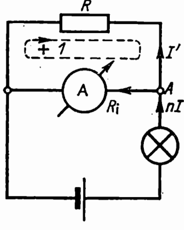


Bild 28

Aus beiden Beziehungen ergibt sich nach erfolgter Umstellung

$$R_i I = RI' = R(nI - I),$$

$$R_i I = I(n - 1) R,$$

$$R_i = (n - 1) R,$$

$$R = \frac{R_i}{n - 1},$$

wobei n bedeutet, einen wieviel mal so großen Strom wir messen wollen, als das Instrument selbst es ermöglichen würde. Daher hat der erforderliche Shunt den Widerstand

$$R = \frac{R_i}{n - 1} = \frac{0{,}2\ \Omega}{5 - 1} = \underline{0{,}05\ \Omega}.$$

46. Wie kann man den Meßbereich eines Voltmeters, das einen Innenwiderstand von $R_i = 100\ \Omega$ hat, so erweitern, daß der Grundmeßbereich mit dem Maximalwert $U = 10\,\mathrm{V}$ auf den zehnfachen Wert $U' = 100$ V gesteigert wird?

Lösung

Wir wollen eine n mal so große Spannung ($U' = nU$) messen, als durch U angegeben wird. Dabei ist U diejenige Spannung, für die das Voltmeter berechnet ist. Dazu ist es notwendig, einen solchen Widerstand R mit dem Gerät in Serie zu schalten, der es erlaubt, in Übereinstimmung mit dem OHMschen Gesetz die Beziehung

$$nU = IR + IR_i \quad \text{(Bild 29)}$$

zu erfüllen. Da wir die Spannung U des Voltmeters mit dem Meßbereich von 10 V und einem inneren Widerstand R_i im OHMschen Gesetz durch die Beziehung

$$U = R_i I$$

ausdrücken, können wir weiter schreiben

$$nR_i I = IR + IR_i$$

und erhalten also

$$R = (n - 1)R_i.$$

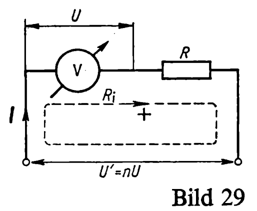
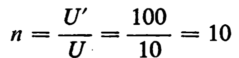


Bild 29

Da wir im vorliegenden Fall den Meßbereich des Voltmeters um



$$n = \frac{U'}{U} = \frac{100}{10} = 10$$

erweitern wollen, ist ein in Serie zu schaltender Widerstand

$$R = (10 - 1)\ 100\ \Omega = \underline{900\ \Omega}$$

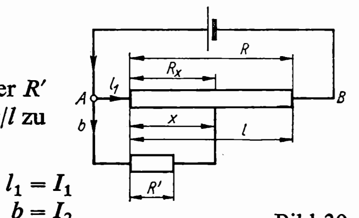
erforderlich.

47. Ein Rheostat mit dem Gesamtwiderstand R, an den eine Spannung U angelegt wurde, soll als Potentiometer zur Speisung eines Stromverbrauchers mit dem Widerstand R' verwendet werden. Eine Verschiebung des Schleifkontakts um die Strecke x verursacht bei einer Gesamtlänge l eine lineare Veränderung des Widerstands, nämlich

$$R_x = \frac{x}{l} R.$$

Es muß demnach (Bild 30) die am Stromverbraucher R' anliegende Spannung als Verhältnis der Strecken x/l zu bestimmen sein:

$$U_x = f\left(\frac{x}{l}\right),$$



$l_1 = I_1$
$b = I_2$

Bild 30

oder das Potentiometer muß so geeicht werden, daß an einer bestimmten Stellung des Schleifkontakts die am Verbraucher anliegende Spannung abgelesen werden kann.

Lösung

Unter Verwendung der Bezeichnungen in Bild 119 können wir gemäß dem OHMschen und dem KIRCHHOFFschen Gesetz schreiben

$$U = I_1 R_x + I(R - R_x),$$
$$0 = I_2 R' - I_1 R_x,$$
$$I = I_1 + I_2.$$

Mit Hilfe der ersten Gleichung drücken wir I, mit der zweiten I_2 aus und setzen die so gewonnenen Ausdrücke in die dritte Gleichung ein, wodurch wir erhalten

$$I = \frac{U - I_1 R_x}{R - R_x}, \qquad I_2 = \frac{I_1 R_x}{R'},$$

$$\frac{U - I_1 R_x}{R - R_x} = I_1 + \frac{I_1 R_x}{R'}.$$

Daraus folgt

$$I_1 = U \frac{R'}{(R' + R_x)(R - R_x) + R_x R'}$$

und schließlich

$$U_x = I_1 R_x = U \frac{R' R_x}{(R' + R_x)(R - R_x) + R_x R'}.$$

Wenn wir hier für R_x den Ausdruck $R_x = Rx/l$ einsetzen, erhalten wir nach Umformung schließlich als Endergebnis

$$U_x = U \frac{R' \frac{x}{l}}{R' + R\frac{x}{l} - R\left(\frac{x}{l}\right)^2}.$$

48. Welche Bedingungen müssen die in Bild 31 dargestellten Widerstände R_1, R_2, R_3 und R_4 erfüllen, damit in der WHEATSTONEschen Brücke durch den in der Diagonalen liegenden Widerstand R_5 kein Strom fließt?

Lösung

Für die beiden Stromkreise I und II in Bild 31, in denen wir die jeweils positive Umlaufrichtung der Schleife entgegen dem Uhrzeigersinn gewählt haben, wenden wir das 2. KIRCHHOFFsche Gesetz an. Wir setzen dabei voraus, daß der durch den Widerstand R fließende Strom ein Nullstrom ist, d. h., daß hier $I = 0$ ist. Demnach gilt für den Stromkreis I

$$0 = R_3 I_3 - R_1 I_2 + R_5 \cdot 0,$$

für den Stromkreis II

$$0 = R_4 I_3 - R_2 I_2 + R_5 \cdot 0.$$

Daraus erhalten wir zwei weitere Gleichungen

$$R_1 I_2 = R_3 I_3; \quad R_2 I_2 = R_4 I_3$$

und durch deren gegenseitige Division

$$\underline{\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}}.$$

Das ist nunmehr die Bedingung, die erfüllt sein muß, damit durch den Widerstand R_5 kein Strom fließt.

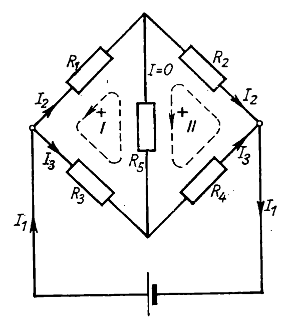


Bild 31

49. Wie kann der Widerstand R_G eines Galvanometers G, das entsprechend Bild 32a in einer WHEATSTONEschen Brücke sitzt, gemessen werden, wenn kein anderes Galvanometer zur Verfügung steht?

Lösung

Die üblicherweise verwendete Schaltung der WHEATSTONEschen Brücke in Bild 32a verändern wir nach Bild 32b, oder wir schließen das Galvanometer dort an, wo sich

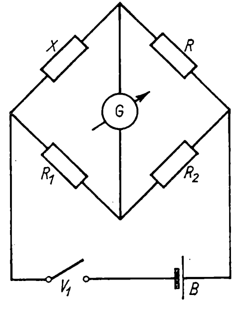


Bild 32a

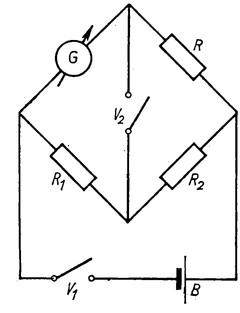


Bild 32b

sonst der unbekannte Widerstand X befindet, und ordnen dafür in der Diagonalen einen weiteren Schalter V_2 an.
Wenn wir die Widerstände R_1 und R_2 so verändern, daß sich der Ausschlag des Galvanometers G beim Ein- und Ausschalten des Schalters V_2 nicht ändert, dann fließt in der Diagonalen offensichtlich kein Strom, und es gilt – wie das vorhergegangene Beispiel zeigt – die Beziehung

$$\frac{R_G}{R_1} = \frac{R}{R_2}.$$

Daraus ergibt sich für den Widerstand des Galvanometers die folgende Beziehung:

$$R_G = R\frac{R_1}{R_2}.$$

50. An einer Netzspannung von $U = 220$ V sind in einem Schulhaus $n = 20$ Glühlampen installiert, deren jede eine Leistung von $P = 60$ W aufnimmt. Die Anschlußleitung hat eine Länge $l = 25$ m. Wie groß muß die Querschnittsfläche A des Anschlußkabels sein, damit der von ihm hervorgerufene Spannungsabfall $p = 1{,}5\,\%$ nicht übersteigt? Die Leitung soll aus Kupfer bestehen.

Lösung

Der am Widerstand R der Zuleitung auftretende Spannungsabfall ΔU kann mit Hilfe des hindurchfließenden Stroms ausgedrückt werden

$$\Delta U = RI.$$

Dabei berechnen wir den Widerstand der Anschlußleitung aus der doppelten Länge der Leitung (Bild 33)

$$R = \varrho\,\frac{2l}{A}$$

(l Länge, A Querschnitt, ϱ spezifischer Widerstand).
Der Strom I kann wie folgt definiert werden:

$$I = \frac{P_g}{U} = \frac{nP}{U},$$

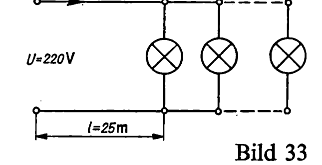


Bild 33

wobei P_g die Gesamtleistungsaufnahme aller Stromverbraucher darstellt, so daß wir nach dem Einsetzen von R und I für die Spannungsabnahme die Beziehung

$$\Delta U = \varrho\,\frac{2l}{A}\,\frac{Pn}{U}$$

erhalten. Die Spannungsabnahme ΔU können wir auch mit Hilfe der Prozentangabe p durch die Beziehung ausdrücken

$$\Delta U = U\,\frac{p}{100}.$$

Wenn wir beide die Spannungsabnahme enthaltenden Ausdrücke gleichsetzen, finden wir

$$\varrho \frac{2l}{A} \frac{Pn}{U} = U \frac{p}{100}.$$

Daraus ergibt sich

$$A = \frac{\varrho\, 2lPn}{U^2 p} \cdot 100 = \frac{0{,}0178\ \Omega\ \mathrm{mm^2\ m^{-1}} \cdot 2 \cdot 25\ \mathrm{m} \cdot 60\ \mathrm{W} \cdot 20}{220^2\ \mathrm{V^2} \cdot 1{,}5} \cdot 100 =$$
$$= \underline{1{,}47\ \mathrm{mm^2}}.$$

In der Praxis würden wir den nächsthöheren serienmäßig produzierten Querschnitt von 1,5 mm² verwenden.

51. Der Widerstand der Heizspirale in einem elektrischen Kocher hat den Wert $R = 16\ \Omega$. Nach wieviel Minuten beginnt eine Wassermenge der Masse $m = 0{,}6$ kg im Kocher zu sieden, wenn die Anfangstemperatur des Wassers mit $\vartheta_1 = 10$ °C angegeben ist? Der Wirkungsgrad des Kochers wird mit $\eta = 60\%$ und die Netzspannung mit $U = 120$ V angegeben.

Lösung

Die Wärmemenge, die für das Erhitzen von 600 g Wasser um eine Temperaturdifferenz von $\Delta\vartheta = 100\ °\mathrm{C} - 10\ °\mathrm{C} = 90$ K bei hundertprozentigem Wirkungsgrad des Kochers benötigt würde, ist

$$Q' = cm\Delta\vartheta,$$

wobei c die spezifische Wärmekapazität des Wassers darstellt. Bei einem nur 60%igen Wirkungsgrad des Kochers ist die Gesamtwärme, die vom Kocher geliefert wird, größer, nämlich

$$Q = \frac{Q'}{\eta} = \frac{cm\Delta\vartheta}{\eta}. \tag{1}$$

Andererseits berechnen wir die elektrische Energie aus

$$W = UIt = U \frac{U}{R} t = \frac{U^2}{R} t. \tag{2}$$

Durch Gleichsetzen von Gl. (1) u. Gl. (2) und Berücksichtigung von

$$1 \frac{\mathrm{V^2}}{\Omega} = 1\ \mathrm{W} = \frac{1}{4{,}1868}\ \mathrm{cal\ s^{-1}} = 0{,}239\ \mathrm{cal\ s^{-1}}$$

ergibt sich

$$t = \frac{cm\Delta\vartheta R}{\eta U^2} = \frac{1\ \mathrm{cal\ g^{-1}\ K^{-1}} \cdot 600\ \mathrm{g} \cdot 90\ \mathrm{K} \cdot 16\ \Omega}{0{,}6 \cdot 120^2\ \mathrm{V^2} \cdot 0{,}239\ \mathrm{cal\ W^{-1}\ s^{-1}}} = 419\ \mathrm{s} \approx \underline{7\ \mathrm{min}}.$$

52. Wenn eine Glühlampe bei einer Spannung $U = 120$ V mit einer Leistungsaufnahme $P = 100$ W betrieben wird, so ist der Widerstand ihres Glühfadens zehnmal so groß wie bei einer Temperatur von 0 °C. Wie groß ist der Widerstand der Glühlampe bei 0 °C,

und welcher Wert ergibt sich für den Temperaturkoeffizienten des Widerstands, wenn die Betriebstemperatur des Glühfadens bei $t = 2000$ °C liegt und wenn wir eine lineare Temperaturabhängigkeit des Widerstands annehmen können?

Lösung

Den Ausdruck für die Leistung eines elektrischen Stroms können wir mit Hilfe des OHMschen Gesetzes wie folgt umformen:

$$P = UI = U\frac{U}{R_t} = \frac{U^2}{R_t}.$$

Daraus ergibt sich der Widerstand des Glühfadens der Lampe im Betriebszustand zu

$$R_t = \frac{U^2}{P} = \frac{120^2\ \text{V}^2}{100\ \text{W}} = \frac{14400}{100}\ \Omega = 144\ \Omega.$$

Da der Widerstand des Glühfadens bei 0 °C nur ein Zehntel dieses Wertes betragen soll, gilt

$$R_0 = \frac{R_t}{10} = \frac{144}{10}\ \Omega = \underline{14{,}4\ \Omega.}$$

Den Temperaturkoeffizient α des Widerstands erhalten wir aus der bekannten Beziehung zwischen den Widerständen R_t und R_0

$$R_t = R_0\,(1 + \alpha t).$$

Wenn wir berücksichtigen, daß $R_t = 10\,R_0$ ist, gilt

$$10R = R\,(1 + \alpha \cdot 2000\ \text{K})$$

und daraus

$$\alpha = \frac{10 - 1}{2000\ \text{K}} = \underline{4{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}}.$$

53. Ein Staubsauger, dessen Typenschild eine Netzspannung von $U' = 110$ V und eine Leistung von $P = 190$ W angibt, soll an ein Netz mit der Spannung $U = 220$ V angeschlossen werden. Wie groß muß der vorgeschaltete Widerstand sein (Bild 34)?

Lösung

Bild 34

Durch den Motor des Staubsaugers darf nur ein Strom vom Betrag

$$I = \frac{P}{U'} \qquad (1)$$

fließen. Er soll am gesuchten Widerstand R den Spannungsabfall RI bewirken, der seinerseits gleich der Differenz zwischen Netzspannung U und Betriebsspannung U' sein muß, also

$$U - U' = R\,I.$$

Durch Einsetzen von (1) in (2) folgt

$$U - U' = R \frac{P}{U'}.$$

Daraus erhalten wir den Wert des Widerstands zu

$$R = \frac{(U - U')U'}{P} = \frac{(220\ \mathrm{V} - 110\ \mathrm{V})\ 110\ \mathrm{V}}{190\ \mathrm{W}} = \underline{63{,}68\ \Omega}.$$

54. In welcher Weise muß man $n = 24$ Elemente mit jeweils einer Quellenspannung vom Wert $U_{12} = 1{,}5$ V und dem inneren Widerstand $R_i = 0{,}8\ \Omega$ in einem Stromkreis mit dem Widerstand $R = 1{,}2\ \Omega$ schalten, damit ein angeschlossener Stromverbraucher eine maximale Leistung aufnimmt? Welcher Strom fließt dann durch den Verbraucher?

Lösung

Wir setzen voraus, daß die resultierende Anordnung einer Batterie entspricht, die aus insgesamt m Reihen besteht, die zueinander parallelgeschaltet sind. Jede Reihe besteht ihrerseits aus n in Serie geschalteten Elementen (Bild 35). Die unbekannten Zahlenwerte m und n wird man unter Berücksichtigung der in der Aufgabe gestellten Bedingung ermitteln müssen.

Jede Reihe wird dann durch die Quellenspannung

$$U_{12\mathrm{E}} = nU_{12} \qquad (1)$$

und den inneren Widerstand

$$R_i^* = nR_i$$

gekennzeichnet sein.

Da die einzelnen Reihen parallelgeschaltet sind, wird auch die resultierende Quellenspannung der gesamten Batterie durch Gl. (1) angegeben sein. Jedoch wird der resultierende innere Widerstand der gesamten Batterie

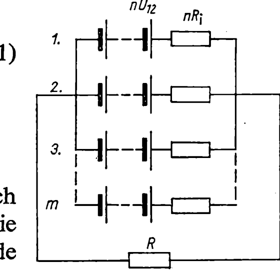


Bild 35

$$R_{ig} = \frac{R_i^*}{m} = \frac{nR_i}{m}.$$

Die Batterie wird imstande sein, an einen Stromkreis den Strom

$$I = \frac{nU_{12}}{R_{ig} + R} = \frac{nU_{12}}{\frac{nR_i}{m} + R} = \frac{nU_{12}}{\frac{n^2}{N} R_i + R} = \frac{nNU_{12}}{n^2 R_i + NR}$$

abzugeben.

Die Leistung am Stromverbraucher wird durch folgende Beziehung ausgedrückt:

$$P = RI^2 = \frac{n^2 N^2 U_{12}^2 R}{(n^2 R_i + NR)^2}.$$

Für das Maximum der Leistung gilt

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0.$$

Demnach ist auch

$$\frac{(n^2R_i + NR)^2\,2nN^2U_{12}^2R - n^2N^2U_{12}^2R(4n^3R_i^2 + 4nR_iNR)}{(n^2R_i + NR)^4} = 0.$$

Daraus folgt

$$-n^4R_i^2 + N^2R^2 = 0;$$

$$n^4 = \frac{N^2R^2}{R_i^2}; \quad n = \sqrt{\frac{NR}{R_i}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 1{,}2}{0{,}8}} = \underline{6};$$

$$m = \frac{N}{n} = \frac{24}{6} = \underline{4}.$$

Unter diesen Bedingungen ergibt sich für die Stromstärke

$$I = \frac{nNE}{n^2R_i + NR} = \frac{4 \cdot 24 \cdot 1{,}5\ \text{V}}{16 \cdot 0{,}8\ \Omega + 24 \cdot 1{,}2\ \Omega} = \underline{3{,}75\ \text{A}}.$$

55. Welche Kupfermenge wird innerhalb einer Zeit von 24 h durch einen Strom von 100 A Stärke aus einer Kupfervitriollösung ausgeschieden? (Das elektrochemische Äquivalent des Kupfers wird mit $\ddot{A} = 0{,}328$ mg $\text{A}^{-1}\ \text{s}^{-1}$ angegeben.)

Lösung

Durch Verwenden des ersten FARADAYschen Gesetzes und Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir

$$m = \ddot{A}It = 0{,}328\ \text{mg A}^{-1}\ \text{s}^{-1} \cdot 100\ \text{A} \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s} = 2833920\ \text{mg} = \underline{2{,}834\ \text{kg}}$$

(I Stromstärke, t Zeit, m Masse des abgeschiedenen Stoffes, $\ddot{A}$ elektrochemisches Äquivalent des abzuscheidenden Stoffes).

56. Ein Metallgegenstand, der eine Oberfläche von 120 cm² hat, wurde galvanisch vernickelt, wobei ein Strom von 0,3 A während einer Zeit von 5 h floß. Berechnen Sie die Dicke der aufgetragenen Nickelschicht. (Nickel ist zweiwertig.)

Lösung

Wir wenden das FARADAYsche Gesetz an:

$$m = \ddot{A}It.$$

$\ddot{A}$ läßt sich durch die folgende Beziehung ausdrücken:

$$\ddot{A} = \frac{\alpha}{v\,F}$$

(α relative Atommasse, v Wertigkeit, F FARADAYsche Zahl). Der Quotient α/v ist das chemische Grammäquivalent.

Für die Masse des abgeschiedenen Metalls gilt

$$m = \frac{\alpha}{\nu F} It = \frac{58{,}69\ \text{g}}{2 \cdot 9{,}65 \cdot 10^4\ \text{C}}\ 0{,}3\ \text{A} \cdot 60 \cdot 60\ \text{s} \cdot 5 = \frac{316\,926\ \text{g}}{193000} = 1{,}643\ \text{g}.$$

Da wir die Masse m (in Gramm) als das Produkt aus der bekannten Fläche A (in cm^2), der spezifischen Dichte ϱ (in g cm^{-3}) und der gesuchten Schichtdicke d (in cm) ausdrücken können, wird

$$m = Ad\varrho,$$

so daß wir schließlich die gesuchte Schichtdicke erhalten

$$d = \frac{m}{A\varrho} = \frac{1{,}643\ \text{g}}{120\ \text{cm}^2 \cdot 8{,}8\ \text{g cm}^{-3}} = \underline{1{,}557 \cdot 10^{-3}\ \text{cm}}.$$

57. Ein Gegenstand mit der Oberfläche $A = 20\ \text{dm}^2$ soll auf galvanischem Wege mit einer Silberschicht von $d = 0{,}2$ mm Dicke versehen werden. Wieviel Silber muß dazu aufgebracht werden, und wie lange wird der Galvanisierungsprozeß dauern, wenn man jeden Quadratdezimeter der Fläche mit einem Strom der Dichte $J = 0{,}4\ \text{A dm}^{-2}$ belasten kann?

Lösung

Zunächst ermitteln wir die notwendigerweise abzuscheidende Masse des Silbers. Für sie gilt

$$m = Ad\varrho = 20\ \text{cm}^2 \cdot 10^2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-1}\ \text{cm} \cdot 10{,}5\ \text{g cm}^{-3} = 420\ \text{g} = \underline{420000\ \text{mg}}.$$

Die für den Galvanisierungsprozeß notwendige Zeitspanne bestimmen wir nach dem FARADAYschen Gesetz aus

$$t = \frac{m}{\ddot{A}JA} = \frac{420000\ \text{mg}}{1{,}118\ \text{mg A}^{-1}\ \text{s}^{-1} \cdot 0{,}4\ \text{A dm}^{-2} \cdot 20\ \text{dm}^2} = \underline{46958\ \text{s}}.$$

A Aufgaben

44. Welche elektrische Ladungsmenge liefert ein galvanisches Element, dem 20 h lang ein Strom von $I = 0{,}5$ A entnommen wird?
45. Wie lange dauert es, bis durch einen Strom von $I = 1{,}5$ A eine elektrische Ladung von 7000 C transportiert wird?
46. Die Wicklung eines elektrischen Gerätes wurde aus einem Leiter mit dem Querschnitt A hergestellt und soll den Strom $I = 3$ A aufnehmen. Wie groß muß der Querschnitt des Leiters sein, wenn die Stromdichte in ihm den Wert $i = 2{,}5\ \text{A mm}^{-2}$ nicht überschreiten soll?
47. Es soll ein Rheostat mit einem Widerstand von $0{,}2\ \Omega$ gebaut werden. Als Werkstoff steht ein Nickelinstreifen von 10 mm Breite und 0,5 mm Dicke zur Verfügung. Welche Länge muß der Nickelinstreifen erhalten? ($\varrho = 4 \times 10^{-5}\ \Omega\ \text{cm}$)
48. Wie groß ist der spezifische Widerstand eines Leiters von $6\ \text{mm}^2$ Querschnitt, wenn wir auf $l = 500$ m Länge beim

Durchfluß des Stroms $I = 6$ A eine Spannung von $U = 14$ V messen?

49. Zur Herstellung einer elektrischen Leitung wurden 400 m Kupferdraht von 6 mm² Querschnitt verwendet. Welchen Widerstand hat diese Leitung?
50. Eine Leitung aus Kupferdraht hat bei einem Querschnitt von 0,1 mm² eine Masse von 0,3 kg. Berechnen Sie den Widerstand dieses Leiters, wenn der spezifische Widerstand des Kupfers mit $1{,}7 \cdot 10^{-6}$ Ω cm und die Dichte mit 8,9 g cm^{-3} angegeben wird.
51. In welchem Verhältnis stehen die Massen einer Kupfer- und einer Aluminiumleitung, die bei gleicher Länge gleichen elektrischen Widerstand aufweisen sollen?
52. Eine Kupferleitung hat einen Querschnitt $A_1 = 25$ mm². Welchen Querschnitt A_2 muß eine Aluminiumleitung haben, damit sie den gleichen elektrischen Widerstand bekommt?
53. Bei einer Temperatur von 15 °C hat eine Kupferleitung einen Widerstand von 21 Ω. Wie groß ist ihr Widerstand bei 30 °C?
54. Damit ein elektrischer Kocher die geforderte Leistung erreicht, muß er bei einer Betriebstemperatur $t = 700$ °C einen Widerstand $R = 24$ Ω haben. Wie groß ist der Widerstand der Heizspirale bei $t_0 = 20$ °C, wenn der Temperaturkoeffizient des Widerstands den Wert $\alpha = 0{,}00002$ K^{-1} hat?
55. Welche Temperatur hat eine Spule, die aus Kupferdraht von 350 m Länge und 1 mm² Querschnitt gewickelt wurde, wenn sie im Betriebszustand einen Widerstand von $R_t = 10{,}5$ Ω aufweist?
56. Die Wicklung des Elektromagneten einer Dynamomaschine ist aus Kupferdraht hergestellt, der bei einer Temperatur $t_1 = 10$ °C einen Widerstand $R_1 = 14{,}2$ Ω hat. Im Betriebszustand vergrößert sich der Widerstand der Wicklung auf den Wert $R_2 = 16{,}5$ Ω. Wie hoch ist die Betriebstemperatur?
57. a) Es ist die Differenz des Widerstands einer Telegrafenleitung für maximale Sommer- und minimale Wintertemperatur von +30 °C bzw. −30 °C zu errechnen. Der Leiter besteht aus einem 100 km langen Eisendraht von 10 mm² Querschnitt mit dem spezifischen Widerstand $\varrho = 8{,}7 \cdot 10^{-6}$ Ω cm, der Temperaturkoeffizient beträgt $\alpha = 6 \times 10^{-3}$ K^{-1}.
    b) Wie ändert sich das Resultat der vorhergehenden Rechnung, wenn wir die bei der Erwärmung im Sommer eintretende Verlängerung des Drahtes berücksichtigen, die unter dem Einfluß eines Längenausdehnungskoeffizienten von $\alpha' = 12 \cdot 10^{-6}$ K^{-1} erfolgt?
58. Vier Widerstände mit den Werten $R_1 = 1$ Ω, $R_2 = 2$ Ω, $R_3 = 3$ Ω, $R_4 = 4$ Ω sind einmal in Serie, einmal parallel zu schalten. Es ist der jeweils resultierende Widerstand zu bestimmen.
59. Wie groß ist der resultierende Widerstand von 7 nach Bild 36 geschalteten Widerständen?
    ($R_1 = 10$ Ω, $R_2 = 10$ Ω, $R_3 = R_4 = 100$ Ω, $R_5 = R_6 = R_7 = 5$ Ω)
60. Wie groß ist der Gesamtwiderstand der in Bild 37 dargestellten Widerstandskombination?
61. Ein 6-V-Autoakku versorgt eine Lampe mit 12 Ω, die Hupe mit 2 Ω und einen Scheinwerfer mit 1 Ω Widerstand. Wel-

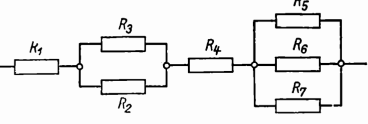


Bild 36

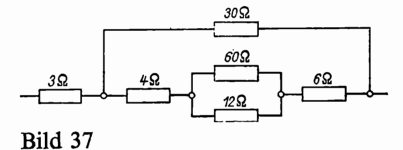


Bild 37

cher Gesamtstrom wird dem Akku bei gleichzeitiger Betätigung der drei parallelgeschalteten Verbraucher entnommen?

62. Eine Klingelbatterie versorgt über eine 85 m lange Doppelleitung von 0,9 mm Durchmesser (Kupferdraht) einen Wecker, dessen Spule einen Widerstand von 6 Ω hat und dabei einen Strom von 0,35 A aufnimmt. Wie groß muß die Spannung der Klingelbatterie sein?

63. Eine aus 50 hintereinandergeschalteten Elementen bestehende Batterie speist ein äußeres Netz, das aus einem 20 km langen Eisendraht von 3 mm² Querschnitt besteht und das einen Verbraucher mit einem Widerstand von 90 Ω enthält. Die Quellenspannung und der innere Widerstand jedes einzelnen Batterieelements betragen 1,4 V bzw. 0,4 Ω. Zu berechnen ist die Stromstärke unter der Maßgabe, daß Eisendraht vom spezifischen Widerstand $8{,}7 \cdot 10^{-6}\,\Omega\,\text{cm}$ verwendet wird.

64. Die Pole eines LECLANCHÉ-Elements sind über einen Widerstand $R_0 = 3{,}1\,\Omega$ miteinander verbunden. Der innere Widerstand des Elements hat den Wert $R_i = 0{,}5\,\Omega$, und seine Quellenspannung beträgt 1,5 V. Welche Stromstärke stellt sich ein?

65. Eine Doppelleitung aus Kupferdraht mit einem Querschnitt $A = 10\,\text{mm}^2$ überträgt auf eine Entfernung von $l = 500\,\text{m}$ einen Strom von $I = 5\,\text{A}$. Die Klemmenspannung am Anfang der Leitung hat den Wert $U = 220\,\text{V}$. Wie groß ist die Klemmenspannung am Verbraucher? Wie groß ist der Spannungsverlust?

66. Ein Kupferseil besteht aus sieben Einzeldrähten von je 1,7 mm Durchmesser.
a) Wie groß ist der gesamte Widerstand des Seils bei einer Länge von 1000 m?
b) Aus dem Seil wird eine Doppelleitung hergestellt, die an ihrem Anfang eine Spannung von $U_1 = 220\,\text{V}$ aufweist. Wie groß wird die Spannung U_2 am Leitungsende sein, wenn durch den Leiter ein Strom von 10 A fließt?
c) Welche Stromstärke I_k wird diese Doppelleitung aufnehmen, wenn an ihrem Ende ein Kurzschluß eintritt?

67. Ein Voltmeter, das mit einem Widerstand $R = 10^4\,\Omega$ in Serie geschaltet wird, zeigt, an eine Spannungsquelle von $U_0 = 120\,\text{V}$ angeschlossen, eine Spannung vom Betrag $U_1 = 50\,\text{V}$ an. Wenn das gleiche Voltmeter mit einem unbekannten Widerstand R_x an gleicher Spannungsquelle in Serie geschaltet wird, zeigt es nur noch eine Spannung $U_2 = 10\,\text{V}$ an. Berechnen Sie den unbekannten Widerstand R_x.

68. Zwei Voltmeter mit gleichem Meßbereich, aber unterschiedlichem innerem Widerstand, und zwar $R_{i1} = 17\,300\,\Omega$ und $R_{i2} = 5200\,\Omega$, sind hintereinandergeschaltet und an eine Spannung von 220 V angeschlossen. Welche Ausschläge werden die beiden Voltmeter zeigen?

69. Eine Salzlösung mit dem Widerstand $R_1 = 1\,\Omega$ ist durch Kupferdrähte, deren Gesamtwiderstand $R_2 = 2\,\Omega$ beträgt, an ein DANIELL-Element mit einer Quellenspannung von 1,1 V und dem inneren Widerstand $R_i = 0{,}5\,\Omega$ angeschlossen. Welcher Strom fließt im Stromkreis, und wie groß ist die Klemmenspannung des Elements?

70. Drei galvanische Elemente mit den Urspannungen $U_1 = 1{,}3\,\text{V}$, $U_2 = 1{,}5\,\text{V}$ und $U_3 = 2\,\text{V}$ haben die inneren Widerstände $R_{i1} = R_{i2} = R_{i3} = 0{,}2\,\Omega$ und sind gemäß Bild 38 miteinander verbunden. Der Widerstand beträgt $R = 0{,}55\,\Omega$. Es sind die Teilströme I_1, I_2, I_3 zu ermitteln.

71. Welche Ströme fließen durch die einzelnen Widerstände der in Bild 39 dargestellten Schaltanordnung, wenn $R_1 = 5\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 4\,\Omega$ und $E_1 = 4{,}5\,\text{V}$, $E_2 = 2\,\text{V}$ groß ist? Welche Spannung liegt am Widerstand R_3 an?

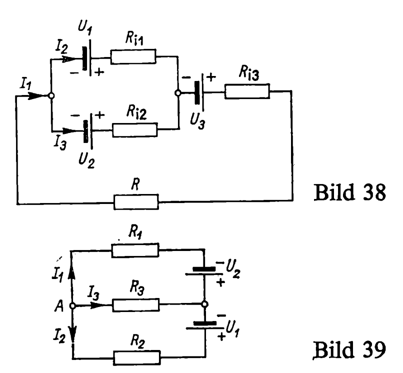


Bild 38

Bild 39

72. Ermitteln Sie die Stromstärken in den Verzweigungen der Schaltanordnung in Bild 40, wenn die Quellenspannung eines Elements den Wert $U_1 = 1{,}5$ V hat und wenn die drei Elemente in Serie geschaltet sind. Der innere Widerstand eines Elements beträgt 0,5 Ω. Die Widerstände in den Abzweigungen sind $R_1 = 4\,\Omega$ und $R_2 = 12\,\Omega$.

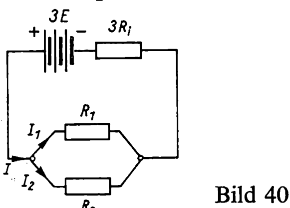


Bild 40

73. Ein Milliamperemeter, dessen Skale 100 Teilstriche enthält, hat einen inneren Widerstand $R_i = 10\,\Omega$ und soll bei einer Stromstärke $I' = 10$ mA a) als Voltmeter bis zur Spannung $U = 300$ V und b) als Amperemeter bis zur Stromstärke $I = 20$ A verwendet werden. Welcher Vorschaltwiderstand bzw. Shunt wird dazu erforderlich?

74. Ein Amperemeter hat einen Innenwiderstand von 0,02 Ω und erlaubt, Ströme bis zu 1,2 A Stärke zu messen. Wie muß ein Nebenwiderstand bemessen sein, damit man mit dem so veränderten Instrument Ströme bis zu einer Stärke von 6 A messen kann?

75. Ein Voltmeter mit einem Innenwiderstand von 3000 Ω hat einen Meßbereich bis 150 V und eine in 150 Teilstriche unterteilte Skale. Welcher Strom fließt durch das Voltmeter bei vollem Zeigerausschlag? Welcher Widerstand müßte vorgeschaltet werden, um den Meßbereich des Instruments auf 600 V zu erweitern? Welchen Wert zeigt dann ein einzelner Teilstrich noch an?

76. Welche Ladungsmenge fließt durch einen Leiter mit dem Widerstand $R = 10\,\Omega$ innerhalb einer Zeit von 20 s, wenn zwischen den Leiterenden eine Spannung von 12 V besteht? Welche Arbeit verrichtet dabei der Strom?

77. In einer Wohnung wird eine 25-W-Lampe täglich für die Dauer von vier Stunden betrieben. Was muß dafür monatlich bezahlt werden, wenn wir den Monat mit 30 Tagen ansetzen und der Preis für die Kilowattstunde Elektroenergie 0,08 M beträgt?

78. Welche Wärmemenge setzt ein elektrischer Kocher frei, der, an 120 V Spannung angeschlossen, drei Stunden lang von einem Strom der Stärke $I = 8{,}3$ A durchflossen wird?

79. Zwei Glühlampen von 100 bzw. 60 W Leistung sind an die gleiche Spannung angelegt. Welche von ihnen hat den größeren Widerstand?

80. Wie lange war ein elektrischer Kocher von 600 W Leistungsaufnahme eingeschaltet, wenn der Zähler einen Stromverbrauch von 1,8 kWh anzeigt?

81. Wie groß muß die Leistung eines elektrischen Kochers sein, wenn er zwei Liter Wasser von 10 °C innerhalb von 25 min auf 100 °C erhitzen soll, wobei von der vom Kocher aufgenommenen elektrischen Leistung nur 70% für die Erwärmung des Wassers wirksam werden?

82. Wie groß muß der Widerstand eines Stromverbrauchers sein, der bei einer Spannung von 220 V stündlich 3690 kJ Wärme freisetzen soll?

83. Welcher Strom fließt durch einen elek-

trischen Kocher, der, mit einer Spannung von 120 V betrieben, innerhalb von drei Stunden 25 l Wasser um 50 °C erwärmt, wenn der Wirkungsgrad des Kochers mit 100% angenommen wird?

84. Wie groß ist der Wirkungsgrad eines elektrischen Kochers, der, mit 220 V betrieben, bei einem Strom von 3 A einen Liter Wasser innerhalb 11 min von 18 °C bis zum Sieden erhitzt?
85. Die Leistung eines unbekannten Elektromotors soll ohne Verwendung eines Wattmeters bestimmt werden. Der Motor war im Gleichstrombetrieb 10 min angeschlossen, und ein Zähler zeigte einen Stromverbrauch von 0,1 kWh an.
86. Ein Elektromotor hat eine Leistung von 1,1 kW. Bei einer Spannung von 120 V nimmt er einen Strom von $I = 10$ A auf. Wie groß ist sein Wirkungsgrad? Was kostet der Stromverbrauch bei 8 h Betrieb, wenn für die Kilowattstunde ein Preis von 0,08 M berechnet wird?
87. Wie groß ist die Stromstärke, die ein 5,9-kW-Motor bei 220 V dem Netz entnimmt, wenn er voll belastet wird und sein Wirkungsgrad 82% erreicht?
88. Ein Elektromotor ist einem 440-V-Netz angeschlossen, dem er einen Strom von 20 A entnimmt. Wie groß ist seine Leistung, und was wird ein fünfstündiger Betrieb kosten, wenn eine Kilowattstunde mit 0,04 M berechnet wird?
89. An ein elektrisches Gleichstromnetz von 220 V Spannung ist ein 100-Ω-Widerstand angeschlossen. Welche Leistung nimmt er auf, und welche Menge Wasser könnte theoretisch innerhalb einer Stunde damit von 18 °C bis zum Sieden erhitzt werden?
90. Die zulässige Belastung eines Widerstands von 2000 Ω beträgt laut Angabe des Herstellerbetriebes $P = 4$ W. Welchen Strom darf man durch den Widerstand leiten?
91. Was kostet die elektrische Erwärmung eines Liters Wasser von 10 auf 100 °C, wenn der Preis für eine Kilowattstunde mit 0,08 M angegeben ist und der Wirkungsgrad der Vorrichtung 90% beträgt?
92. Wie muß man 48 gleichartige Elemente, jedes mit einem inneren Widerstand von 0,2 Ω, zu einer Batterie vereinigen, damit ein Außenwiderstand von 2,4 Ω eine maximale Leistung aufnehmen kann?
93. Welche Kupfermenge wird elektrolytisch aus einer Kupfervitriollösung ausgeschieden, durch die 24 h lang ein Strom von 100 A fließt?
94. Welche Stromstärke fließt durch einen Elektrolyten der Art $CuSO_4$, wenn innerhalb von 15 min 3 g Kupfer ausgeschieden werden?
95. Es sollen 25 Löffel, jeder mit einer Oberfläche von 0,8 dm², auf elektrolytischem Wege versilbert werden, wobei jeder Löffel eine Silbermenge von 5 g aufnimmt. Die zulässige Stromdichte beträgt 0,3 A dm⁻². Mit welcher Stromstärke muß gearbeitet werden, und wie lange dauert der Prozeß?
96. Ein zu versilbernder Gegenstand hat eine Oberfläche von 200 cm². Es wird mit einer Stromstärke von $I = 0{,}5$ A gearbeitet. Nach welcher Zeit erreicht die Silberschicht eine Dicke von 0,02 cm?

1.3. Elektromagnetismus

Die Kraft F_{12}, mit der zwei stromdurchflossene Leiter aufeinander wirken, kann man entsprechend den Vorstellungen von Ampère aus der Beziehung errechnen (Bild 41):

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{d\vec{s}_2 \times (d\vec{s}_1 \times \vec{r}_{1,2})}{r^3},$$

($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs $A^{-1}m^{-1}$ **magnetische Feldkonstante**, bisher auch absolute Permeabilität oder Induktionskonstante genannt; I_1 und I_2 die Ströme in den beiden Leitern, $d\vec{s}_1$ und $d\vec{s}_2$ Leiterelemente, $\vec{r}_{1,2}$ der Ortsvektor des einen Leiters in bezug auf das entsprechende Element des anderen Leiters).
Dabei muß die Integration vollständig um beide Leiter ausgeführt werden.
Die **magnetische Induktion**, die der Strom I in einem bestimmten Raumpunkt, der durch den Ortsvektor $\vec{r}$ bezeichnet wird, erzeugt, wenn sich dieser Raumpunkt im Vakuum befindet, wird durch

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

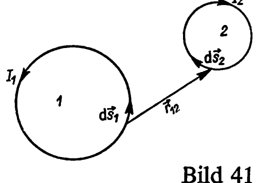


Bild 41

angegeben, das sog. **Biot-Savart-Laplacesche Gesetz.**
Dabei ergibt sich für die Größe $\vec{B}$ die Einheit Vs m^{-2} = = Wb m^{-2} = T (Tesla), wenn die einzelnen eingehenden Größen im Internationalen Einheitensystem ausgedrückt werden. Die Beziehung zwischen Wb m^{-2} und der bislang oft angewendeten Einheit des CGS-Systems Gauß (G) ist wie folgt definiert:

$$1\ \mathrm{G} = 10^{-4}\ \mathrm{Wb\,m^{-2}}.$$

Auf das Element $d\vec{s}$ eines Leiters, das vom Strom I durchsetzt wird, wirkt ein Magnetfeld mit der Induktionsflußdichte (Induktion) $\vec{B}$ durch die Kraft

$$d\vec{F} = I\, d\vec{s} \times \vec{B}.$$

Der Zusammenhang zwischen dem Vektor der **magnetischen Induktion** $\vec{B}$ und dem Vektor der **magnetischen Feldstärke** $\vec{H}$ wird durch die Beziehung

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

angegeben, wobei μ die *Permeabilität* des betreffenden Stoffes

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\varkappa}{\mu_0}\right) = \mu_0 \mu_r,$$

$\varkappa$ die *magnetische Suszeptibilität* des Mediums und μ_r die *Permeabilitätszahl* (bisher auch relative Permeabilität genannt) des Mediums bedeutet.
Im Internationalen Einheitensystem ist die Einheit der magnetischen Feldstärke das Am^{-1}. Jedoch wird oft auch noch die aus dem CGS-System stammende Einheit Oersted (Kurzzeichen Oe) verwendet, wobei der Zusammenhang beider Einheiten wie folgt definiert ist:

$$1\ \mathrm{Oe} = \frac{10^3}{4\pi}\ \mathrm{A\,m^{-1}}.$$

Unter dem Begriff **magnetischer Fluß** (Induktionsfluß) durch eine bestimmte Fläche verstehen wir die Größe

$$\Phi = \int \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{A},$$

wobei $\vec{B}$ die magnetische Induktion und $\mathrm{d}\vec{A}$ der Flächenvektor ist, der zum Flächenelement $\mathrm{d}A$ gehört. Wenn der Vektor $\vec{B}$ senkrecht zum Flächenelement $\mathrm{d}A$ gerichtet ist (d. h. parallel mit dem Vektor $\mathrm{d}\vec{A}$ verläuft), kann man schreiben

$$\mathrm{d}\Phi = B\, \mathrm{d}A.$$

Für den Fall, daß die magnetische Induktion B in jedem Punkt der Fläche A denselben Wert hat, gilt

$$\Phi = BA.$$

Dabei ergibt sich, wenn wir B und A gemäß dem Internationalen Einheitensystem einsetzen, für Φ die Einheit Weber (Wb). Bisher wurde auch noch die aus dem CGS-System stammende Einheit Maxwell (Mx) verwendet, für die gilt

$$1\ \mathrm{Mx} = 10^{-8}\ \mathrm{Wb}.$$

Wenn ein geschlossener Integrationsweg mit einem geschlossenen elektrischen Stromleiter gekoppelt ist, gilt die Durchflußgleichung

$$\oint \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{s} = N\mu_0 I$$

($\mathrm{d}\vec{s}$ Wegelement, I Stromstärke im Leiter, μ_0 magnetische Feldkonstante, wenn der Leiter im Vakuum angeordnet ist, N Zahl, die ausdrückt, wie oft der Integrationsweg den Leiter umschließt).
Die **Durchflußgleichung** kann man auch in der Form

$$\oint H\, \mathrm{d}s = NI$$

schreiben, wobei H die magnetische Feldstärke bedeutet. Den Wert des angegebenen Integrals bezeichnen wir auch als *magnetomotorische Kraft.*
Den **magnetischen Widerstand** R_m eines magnetischen Kreises berechnen wir nach der HOPKINSschen Formel

$$R_\mathrm{m} = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$$

(μ Permeabilität des Mediums, aus dem der magnetische Kreis gebildet wurde, l seine Länge, A sein Querschnitt). Wenn ein Leiter der Länge l sich mit der Geschwindig-

keit v in einem homogenen magnetischen Feld der Induktion $\vec{B}$ senkrecht zu dieser bewegt, wird in ihm eine elektrische Spannung induziert, die gegeben ist durch

$$U_i = Blv.$$

Allgemein wird in einem geschlossenen Leiter immer dann eine Spannung induziert, wenn sich der Induktionsfluß, der durch die vom Leiter umschlossene Fläche strömt, verändert. Dabei ist die induzierte Spannung gleich dem negativen Wert der zeitlichen Ableitung des Induktionsflusses, der durch die vom Leiter umschlossene Fläche hindurchtritt, also

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Beim Anwenden dieser Beziehung muß man in Übereinstimmung mit ihrer Ableitung den magnetischen Induktionsfluß dann als negativ bezeichnen, wenn er auf die Seite der vom Leiter umschlossenen Fläche fließt, von der aus gesehen der Strom im Leiter entgegen dem Uhrzeigersinn gerichtet ist. Im anderen Fall ist der Induktionsfluß positiv.

Die **Selbstinduktionsspannung**, die durch zeitliche Änderung der Stromstärke I induziert wird, berechnen wir entsprechend der Beziehung

$$U_{si} = -L\frac{dI}{dt},$$

wobei L die *Induktivität* des Leiters ist, in dem die Selbstinduktion auftritt. Wir berechnen sie aus der Formel

$$L = \frac{\Phi}{I},$$

so daß L eigentlich die Proportionalitätskonstante zwischen dem magnetischen Induktionsfluß Φ durch die von einem Leiter umschlossene Fläche und dem Strom I, der durch diesen Leiter fließt, darstellt.

Wenn in der Nähe eines Leiters *1* ein anderer Leiter *2* angeordnet ist, so wird in diesem eine Induktionsspannung U_{12} auftreten, wenn sich im Leiter *1* der Strom I_1 zeitlich ändert:

$$U_{12} = -L_{12}\frac{dI_1}{dt},$$

wobei L_{12} die *Wechselinduktivität* ist; sie ist eigentlich die Proportionalitätskonstante zwischen dem magnetischen Induktionsfluß Φ_{12}, der infolge der Existenz des Stroms I_1 im Leiter *1* durch die von Leiter *2* umschlossene Fläche tritt, und dem Strom I_1 selbst.

Deshalb gilt

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}.$$

Völlig analog wird im Leiter *1* bei einer Änderung des Stromes im Leiter *2* infolge der Wechselinduktivität die Spannung

$$U_{21} = -L_{21}\frac{dI_2}{dt}; \quad L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

induziert, wobei

$$L_{12} = L_{21}$$

ist.
Die **Energie des Magnetfeldes** eines elektrischen Stromes I, der durch einen Leiter fließt, dessen Induktivität mit L angegeben wird, berechnen wir aus

$$W = \frac{1}{2}LI^2.$$

B Beispiele

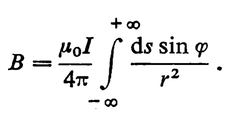
58. Bestimmen Sie die magnetische Induktionsflußdichte und die magnetische Feldstärke im Abstand $l = 5$ cm von einem sehr langen, geraden Leiter, durch den ein Strom $I = 5$ A fließt.

Lösung

Wir gehen zunächst von der Definition der magnetischen Induktion aus

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Da es sich um einen theoretisch unendlich langen Leiter handeln soll, können wir in Übereinstimmung mit den in Bild 42 verwendeten Bezeichnungen für den Wert der magnetischen Induktion schreiben:



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds \sin\varphi}{r^2}.$$

Bild 42

Aus Bild 42 folgt, daß

$$s = d - l \cot\varphi,$$

woraus sich ergibt

$$ds = \frac{l}{\sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Des weiteren finden wir

$$r = \frac{l}{\sin \varphi},$$

so daß wir für den Wert der magnetischen Induktion erhalten:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\frac{l}{\sin^2 \varphi} d\varphi \sin \varphi}{\frac{l^2}{\sin^2 \varphi}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} \int_0^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \, \mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}} \cdot 5\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 0{,}05\,\mathrm{m}} = \underline{200 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Wb\,m^{-2}}}.$$

Die magnetische Feldstärke im Punkt A wird damit

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{I}{2\pi l} = \frac{5\mathrm{A}}{2\pi\, 0{,}05\,\mathrm{m}} = \frac{100}{2\pi}\,\mathrm{A\,m^{-1}} = \underline{15{,}915\,\mathrm{A\,m^{-1}}}.$$

Magnetische Induktion und Feldstärke sind senkrecht zur Zeichenebene orientiert und weisen im Punkt A in die Richtung hinter die Zeichenebene.

59. Bestimmen Sie die Werte der magnetischen Induktion und der Feldstärke im Zentrum eines ebenen, kreisförmigen Leiters vom Radius $r = 5$ cm, in dem ein Strom $I = 5$ A fließt.

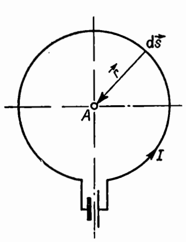


Bild 43

Lösung

In Bild 43 betrachten wir zunächst die magnetische Induktion in einem Punkt A (= Kreismittelpunkt), die von einem infinitesimalen Leiterelement $d\vec{s}$ herrührt:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Da der Vektor des infinitesimalen Ringelements $d\vec{s}$ und der Ortsvektor $\vec{r}$ immer denselben Winkel von 90° einschließen, können wir schreiben

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds \cdot r}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{r^2}.$$

Die vom gesamten Leiter im Punkt A erzeugte Induktion nimmt den Wert

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi r} \mathrm{d}s = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

an und ist senkrecht zur Zeichenebene gerichtet.

Nach Einsetzen der gegebenen Werte erhalten wir

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs} \cdot \mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{m}^{-1} \cdot 5\,\mathrm{A}}{2 \cdot 0{,}05\,\mathrm{m}} = 0{,}2\pi \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Wb\,m}^{-2} =$$

$$= \underline{628 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Wb\,m}^{-2}}.$$

Die magnetische Feldstärke im Punkt A beträgt

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2r} = \frac{5\,\mathrm{A}}{2 \cdot 0{,}05\,\mathrm{m}} = \underline{50\,\mathrm{A\,m}^{-1}}.$$

60. Berechnen Sie den Wert der magnetischen Induktion im Mittelpunkt einer einzigen Drahtwindung, welche die Form eines ebenen Quadrats mit der Seitenlänge l hat, durch die der Strom $I = 5$ A fließt.

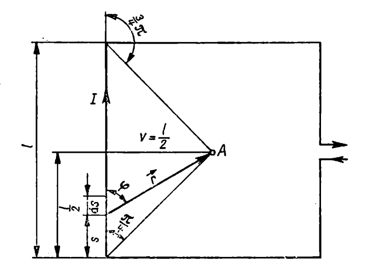


Bild 44

Lösung

Wir gehen wieder von der allgemeinen Beziehung für die Definition der magnetischen Induktion in Hinsicht auf einen Punkt A mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ aus, wobei die magnetische Induktion von einem infinitesimalen Leiterelement $\mathrm{d}\vec{s}$ herrührt:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Wenn wir den Winkel, den die beiden Vektoren $\mathrm{d}\vec{s}$ und $\vec{r}$ einschließen, mit φ bezeichnen, wird

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{r \sin\varphi\,\mathrm{d}s}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\sin\varphi\,\mathrm{d}s}{r^2}.$$

Aus Bild 44 wird ersichtlich, daß

$$s = \frac{l}{2} - v \cot\varphi; \quad \mathrm{d}s = \frac{v}{\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{l\,\mathrm{d}\varphi}{2 \sin^2\varphi};$$

$$\sin\varphi = \frac{v}{r}; \quad r = \frac{v}{\sin\varphi} = \frac{l}{2 \sin\varphi}.$$

Damit nimmt der von einer Seitenlänge l des Quadrats herstammende Anteil an der Gesamtinduktion den Wert an:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin\varphi \dfrac{l\,\mathrm{d}\varphi}{2\sin^2\varphi}}{\dfrac{l^2}{4\sin^2\varphi}} = \frac{2\mu_0}{4\pi l} I \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \left[-\cos\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} .$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l} .$$

Aus Gründen der Symmetrie können wir für die von dem ganzen Quadrat erzeugte Gesamtinduktion auch schreiben

$$B_{\text{ges}} = 4B = 4\,\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l} = \frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 I}{\pi l} .$$

Daraus erhalten wir nach dem Einsetzen der vorgegebenen Werte das Ergebnis für die im Zentrum des Quadrats wirkende Gesamtinduktion zu

$$B_{\text{ges}} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 4\,\pi\cdot 10^{-7}\,\text{Vs A}^{-1}\,\text{m}^{-1}\cdot 5\,\text{A}}{\pi\cdot 0{,}1\,\text{m}} = \underline{0{,}56\cdot 10^{-4}\,\text{Wb m}^{-2}.}$$

Die magnetische Induktion ist senkrecht zur Zeichenebene orientiert und zielt hinter diese.

61. Durch einen kreisförmigen Leiter mit dem Radius $r = 10$ cm fließt ein Strom $I = 2$ A. Berechnen Sie die Induktion des Magnetfeldes in einem Punkt A, der auf der Achse des kreisförmigen Leiters in einem Abstand $l = 10$ cm von diesem entfernt liegt (Bild 45).

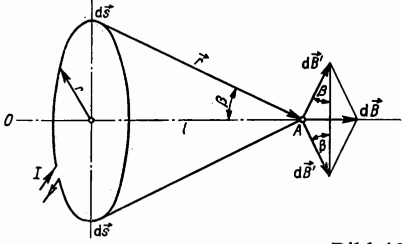


Bild 45

Lösung

Wir gehen wieder von der Beziehung

$$\mathrm{d}\vec{B}' = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{r}'}{4\pi\,r'^3}$$

aus. Da der Vektor $\mathrm{d}\vec{s}$ und der Ortsvektor $\vec{r}'$ stets einen Winkel von 90° einschließen, können wir schreiben

$$\mathrm{d}B' = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}s\,r'\sin 90°}{4\pi\,r'^3} = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}s}{4\pi\,r'^2} .$$

Der angegebene Ausdruck gilt für die magnetische Induktion, die von einem im oberen Teil des kreisförmigen Leiters befindlichen Leiterelement ds ausgeht. Da die Vektoren der magnetischen Induktion, die im kreisförmigen Leiter zu symmetrisch liegenden Längenelementen ds gehören, gleich groß und symmetrisch zueinander sind, können wir den auf sie entfallenden Beitrag zur Induktion zusammenfassen im Ausdruck

$$\mathrm{d}B = 2\,\mathrm{d}B' \sin\beta = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}s \sin\beta}{2\pi\, r'^2}\,.$$

Aus Bild 45 wird auch die Richtung der resultierenden Induktion erkenntlich.
Die vom gesamten kreisförmigen Leiter herrührende Induktion erhalten wir durch Integration, wobei wir die aus dem Bild ersichtlichen Beziehungen

$$r' = \sqrt{r^2 + l^2} \quad \text{und} \quad \sin\beta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

verwenden. Dann finden wir

$$B = \frac{\mu_0 I \sin\beta}{2\pi\, r'^2} \int_0^{\pi r} \mathrm{d}s = \frac{\mu_0 I \sin\beta}{2\pi\, r'^2}\, \pi r$$

$$B = \frac{\mu_0 I \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}}}{2(r^2 + l^2)}\, r = \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}} \cdot 2\,\mathrm{A} \cdot 0{,}1^2\,\mathrm{m}^2}{2\,(0{,}1^2\,\mathrm{m}^2 + 0{,}1^2\,\mathrm{m}^2)^{3/2}} = \underline{4{,}444 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Wb\,m^{-2}}}\,.$$

62. Es ist die magnetische Induktion und die Feldstärke in der Mitte (Punkt 0) und an einem Ende (Punkt B) einer Spule der Länge $l = 1$ m zu berechnen, wenn die Anzahl der Windungen $N = 2000$ beträgt, der Radius der Windung $r = 2$ cm ist und ein Stromfluß von $I = 5$ A angenommen wird (Bild 46).

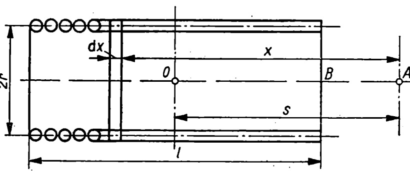


Bild 46

Lösung

Gemäß der im vorherigen Beispiel resultierenden Beziehung für die magnetische Induktion eines kreisförmigen Leiters können wir ansetzen, daß ein Spulenelement der Dicke dx in einem beliebigen, auf der Spulenachse gelegenen Punkt A eine magnetische Induktion von der Größe

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I r^2}{2\,(r^2 + x^2)^{3/2}}\, \frac{N}{l}\, \mathrm{d}x$$

hervorruft. Dabei ist x die Entfernung des Punktes A vom Ort des Spulenelements dx, auf der Spulenachse gemessen, und N/l stellt die auf die Längeneinheit der Spule ent-

fallende Zahl von Windungen dar. Die gesamte Spule erzeugt mithin im Punkt A, dessen Abstand vom Spulenmittelpunkt mit s angegeben ist, eine magnetische Induktion vom Betrag

$$B = \int_{-\frac{l}{2}+s}^{+\frac{l}{2}+s} \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} \frac{N}{l} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mu_0 I N}{2l} \left[\frac{\frac{l}{2} - s}{\sqrt{r^2 + \left(-\frac{l}{2} + s\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + s}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2} + s\right)^2}} \right].$$

Wenn wir die Formel für die resultierende Induktion in einem allgemeinen Punkt $s = 0$ bzw. $s = l/2$ einsetzen, so erhalten wir die entsprechenden Ausdrücke für die magnetische Induktion an den Orten O bzw. B.

a) $s = 0$:

$$B = \frac{\mu_0 I N}{l\sqrt{1 + \left(\frac{2r}{l}\right)^2}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}} \cdot 5\,\mathrm{A} \cdot 2000}{1\,\mathrm{m}\sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 0{,}02\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}\right)^2}} \approx \underline{4\pi \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Wb\,m^{-2}}};$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{IN}{l\sqrt{1 + \left(\frac{2r}{l}\right)^2}} = \frac{5\,\mathrm{A} \cdot 2000}{1\,\mathrm{m}\sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 0{,}02\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}\right)^2}} \approx \underline{10^4\,\mathrm{A\,m^{-1}}};$$

b) $s = \frac{l}{2}$:

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2l\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}} \cdot 5\,\mathrm{A} \cdot 2000}{2 \cdot 1\,\mathrm{m}\sqrt{1 + \left(\frac{0{,}02\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}\right)^2}} \approx$$

$$\approx \frac{2\pi}{10^3} \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2} = \underline{2\pi \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Wb\,m^{-2}}};$$

$$H = \frac{IN}{2l\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} = \frac{5\,\mathrm{A} \cdot 2000}{2 \cdot 1\,\mathrm{m}\sqrt{1 + \left(\frac{0{,}02\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}\right)^2}} \approx \underline{0{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{A\,m^{-1}}}.$$

Es ist ersichtlich, daß im Falle b) die Werte für die magnetische Induktion bzw. die Feldstärke annähernd halb so groß sind wie in der Spulenmitte.

63. Eine Tangentenbussole mit $z = 5$ Windungen und einem Radius $R = 10$ cm befindet sich im Magnetfeld der Erde, das eine Horizontalkomponente der Stärke $H_2 = 16$ A/m hat. Dabei ist die Tangentenbussole so angeordnet, daß die Richtung der irdischen Horizontalkomponente gerade in die Ebene der Bussolenwicklung fällt. Nach Ein-

schalten des Stroms weicht die Magnetnadel aus ihrer ursprünglichen Lage um einen Winkel $\varphi = 45°$ ab (Bild 47). Berechnen Sie den Strom, der durch die Windungen der Bussolenwicklung fließt.

Lösung

In dem Moment, wo durch die Bussolenwicklung ein Strom fließt, wirkt auf die in ihrem Innern gelagerte Magnetnadel außer der Horizontalkomponente $\vec{H}_2$ der Feldstärke des irdischen Magnetfeldes auch noch ein Magnetfeld der Stärke H_1, das durch den Strom hervorgerufen wird, der die Wicklung der Bussole durchfließt. Der Feldstärkevektor $\vec{H}_1$ des Magnetfeldes ist senkrecht zur Ebene der Windungen orientiert und damit auch senkrecht zur irdischen Horizontalkomponente $\vec{H}_2$. Die Magnetnadel richtet sich also in die Richtung der resultierenden Gesamtfeldstärke $\vec{H}$ aus.

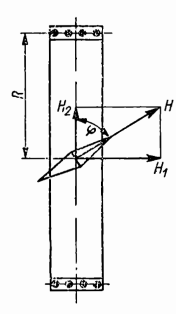


Bild 47

Sie weicht aus ihrer Anfangslage um einen Winkel φ ab, für den gilt

$$\tan\varphi = \frac{H_1}{H_2}.$$

In Beispiel 62 haben wir für die Feldstärke im Innern einer Spule ($s = 0$) die Beziehung

$$H = \frac{IN}{l\sqrt{1+\left(\frac{2r}{l}\right)^2}} = \frac{IN}{\sqrt{l^2+(2r)^2}}$$

abgeleitet. Für eine sehr kurz gebaute Spule können wir aber die Größe l^2 gegenüber $(2r)^2$ vernachlässigen. Wir finden deshalb

$$H_1 = \frac{IN}{2r}$$

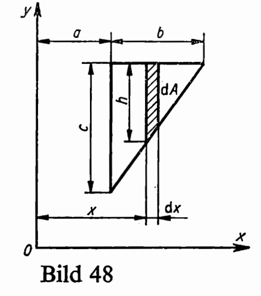


Bild 48

(N Zahl der Windungen, I durch die Bussole fließender Strom, r Spulenradius). Für den gesuchten Strom erhalten wir demnach den Ausdruck

$$I = \frac{2H_2 r\tan\varphi}{N} = \frac{2\cdot 16\,\frac{\text{A}}{\text{m}}\cdot 0{,}1\,\text{m}\cdot\tan 45°}{5} = \underline{0{,}64\,\text{A}}.$$

64. Wie groß ist der magnetische Induktionsfluß Φ durch eine Fläche von der Form eines rechtwinkligen Dreiecks, die sich in einem Magnetfeld befindet, dessen Induktionsflußdichte $\vec{B}$ sich mit dem Abstand gemäß der Beziehung $B = C/x$ (Bild 48) ändert? Das Dreieck habe die Katheten $b = 10$ cm und $c = 10$ cm. Die Kathete c ist $a = 8$ cm von der Ordinatenachse entfernt. Es ist $C = 10^{-4}$ Vs m^{-1}. Das Magnetfeld soll senkrecht zur x,y-Ebene, in der das Dreieck liegt, orientiert sein.

Lösung

Da die magnetische Induktion sich hier von Punkt zu Punkt ändert, müssen wir von der Beziehung ausgehen

$$d\vec{\Phi} = \vec{B}\, d\vec{A}.$$

Der Vektor $\vec{B}$ und der Vektor $d\vec{A}$ (senkrecht zur Dreiecksfläche gerichtet) verlaufen parallel zueinander, so daß wir schreiben können

$$d\Phi = B\, dA \cos 0° = B\, dA.$$

Da gemäß Bild 137 $B = C/x$ und $dA = h\, dx$ ist, können wir auch schreiben

$$d\Phi = \frac{C}{x} h\, dx.$$

Die Größe h ermitteln wir aus der Proportion

$$h:c = (a + b - x):b,$$

d. h.,

$$h = \frac{c(a + b - x)}{b},$$

so daß sich ergibt

$$d\Phi = \frac{C}{x} \frac{c(a + b - x)}{b} dx.$$

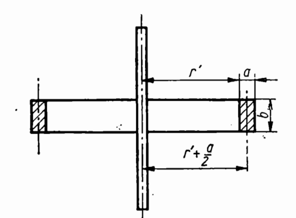


Bild 49

Damit können wir jetzt den gesamten Induktionsfluß, der durch die Dreiecksfläche tritt, bestimmen:

$$\Phi = \int_a^{a+b} \frac{C}{x} \frac{c(a + b - x)}{b} dx = \frac{Cc(a+b)}{b} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} - \frac{Cc}{b} \int_a^{a+b} dx =$$

$$= \frac{Cc(a+b)}{b} \ln \frac{a+b}{a} - \frac{Cc}{b} b = Cc\left(\frac{a+b}{b} \ln \frac{a+b}{a} - 1\right) =$$

$$= 10^{-4}\ \text{Wb m}^{-2} \cdot 0{,}1\ \text{m} \left(\frac{0{,}08\ \text{m} + 0{,}1\ \text{m}}{0{,}1\ \text{m}} 2{,}3 \lg \frac{0{,}08\ \text{m} + 0{,}1\ \text{m}}{0{,}08\ \text{m}} - 1\right) =$$

$$= \underline{0{,}458 \cdot 10^{-5}\ \text{Wb}}.$$

65. Es ist der magnetische Induktionsfluß zu bestimmen, der durch die Querschnittsfläche eines Stahlreifens tritt, wenn dieser nach Bild 49 die Abmessungen $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $r' = 49$ cm hat. Der Induktionsfluß soll durch einen Kurzschlußstrom von $I = 300$ A hervorgerufen werden, der durch einen Leiter in der Symmetrieachse des Reifens fließt. Im gesamten Reifenquerschnitt soll die magnetische Feldstärke denselben Wert haben, den sie auch in der Reifenmitte hat.

Lösung

Wir bestimmen zunächst die magnetische Feldstärke in der Umgebung eines Leiters, durch den ein Strom I fließt, für einen Punkt, der vom Stromleiter den Abstand $(r' + a/2)$ hat, also für einen Punkt in der Mitte der Reifendicke:

$$H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi\left(r' + \frac{a}{2}\right)} = \frac{300\ \text{A}}{2\pi\ (0{,}49\ \text{m} + 0{,}01\ \text{m})} = 95{,}54\ \text{A m}^{-1}.$$

Bei dieser Feldstärke entsteht im Stahl eine magnetische Induktion $B \approx 0{,}2\ \text{Wb m}^{-2} = 0{,}2\ \text{T}$. Diesen Wert erhalten wir aus der Magnetisierungskurve des entsprechenden Werkstoffs (Bild 50). Damit finden wir den magnetischen Induktionsfluß zu

$$\Phi = BA = 0{,}2\ \text{Wb m}^{-2} \cdot 0{,}02\ \text{m} \cdot 0{,}03\ \text{m} = \underline{1{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}}$$

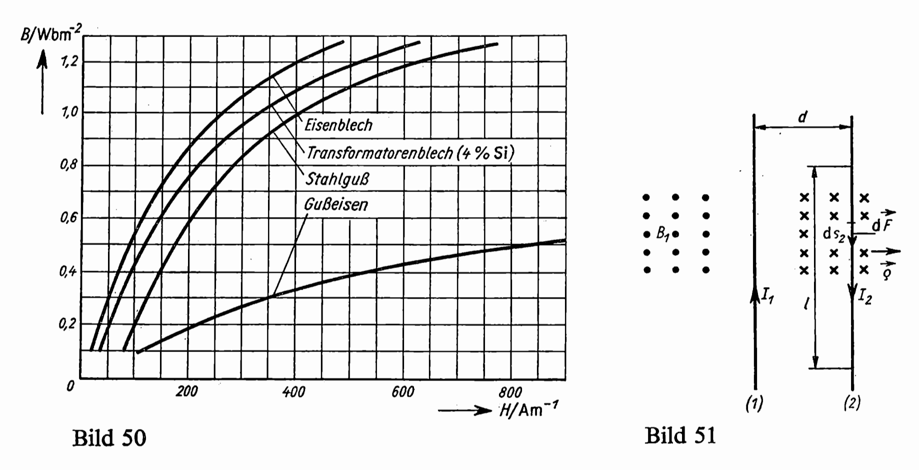


Bild 50

Bild 51

66. Durch zwei lange, gerade, parallel zueinander verlaufende elektrische Leiter fließen zwei gleich große Ströme mit entgegengesetzter Richtung, jeder vom Betrag $I = 400$ A. Die beiden Leiter haben voneinander den Abstand $d = 0{,}3$ m. Bestimmen Sie die Größe und die Richtung der jeweils auf eine Drahtlänge von 10 m wirkenden Kraft.

Lösung

Ausgehend von Bild 51 lösen wir die Aufgabe so, daß wir zunächst die auf den Leiter *2* wirkende Kraft bestimmen, die auftritt, wenn durch ihn der Strom I_2 fließt, während er sich in einem Magnetfeld mit der Induktion $\vec{B}$ befindet, die durch den im Leiter *1* fließenden Strom I_1 hervorgerufen wird. Für diesen Fall ist die auf ein Leiterelement $d\vec{s}_2$ wirkende Kraft durch folgende Beziehung angegeben:

$$d\vec{F} = (I_2\, d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1).$$

Weiter ist uns bekannt, daß die magnetische Induktion in der Umgebung eines sehr langen Leiters (vgl. Beispiel 58) den Wert

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

annimmt. Das in der Formel für die Kraft stehende Vektorprodukt können wir ausrechnen, wenn wir berücksichtigen, daß die kreisförmigen magnetischen Feldlinien in der Umgebung des Leiters *1* senkrecht zum Leiter *2* orientiert sind, also daß auch $d\vec{s}_2$ und $\vec{B}_1$ senkrecht aufeinander stehen, so daß sich ergibt

$$\vec{F} = \int_0^l (I_2 \, d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1) = \int_0^l I_2 \, ds_2 B_1 \sin 90° \, \vec{\varrho} = \mu_0 I_1 I_2 \frac{l}{2\pi d} \vec{\varrho},$$

wobei $\vec{\varrho}$ der Einheitsvektor in Richtung der wirkenden Kraft ist. Da die Ströme gleich sind, $I_1 = I_2 = 400$ A betragen, erhalten wir nach Einsetzen aller Größen

$$F = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1} \cdot 400 \text{ A} \cdot 400 \text{ A} \frac{10 \text{ m}}{2\pi \cdot 0{,}3 \text{ m}} = \underline{1{,}066 \text{ N}}.$$

Die Richtung der Kraft und ihres Einheitsvektors ist durch die Richtung des Resultats der Vektormultiplikation gegeben

$$I_2 \, d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1,$$

d. h., die resultierende Kraft ist senkrecht sowohl zum Leiterelement $d\vec{s}_2$ als auch senkrecht zu $\vec{B}_1$ gerichtet, was auch mit der „Linke-Hand-Regel" übereinstimmt. Die Richtung der Kraft ist also derart, daß die beiden stromdurchflossenen Leiter auseinandergedrückt werden.

67. Welche Kraft wirkt auf einen Leiter der effektiven Länge $s = 0{,}3$ m, der in einem homogenen Magnetfeld mit der Induktionsflußdichte $B = 0{,}8 \text{ Vs m}^{-2}$ von einem Strom $I = 150$ A durchflossen wird, wenn er senkrecht zur Richtung der magnetischen Induktion angeordnet ist?

Lösung

Die Kraft, mit der ein Magnetfeld der Induktion $\vec{B}$ auf ein Leiterelement der Länge $d\vec{s}$ wirkt, das von einem Strom I durchflossen ist, wird durch die Beziehung

$$d\vec{F} = I \, d\vec{s} \times \vec{B}$$

angegeben. Wenn der gerade Leiter senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld angeordnet ist, vereinfacht sich die Beziehung zu

$$F = BIs.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte erhalten wir

$$F = 0{,}8 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} 150 \text{ A} \cdot 0{,}30 \text{ m} = \underline{36 \text{ N}}.$$

68. In einem homogenen Magnetfeld mit der Induktion $B = 0{,}2$ T befindet sich eine flache, rechteckige Spule, die 50 Windungen trägt. Die Abmessungen der Spule sind $a = 3$ cm, $b = 2$ cm. Das Magnetfeld verläuft parallel zur kürzeren Spulenseite (Bild 52). Wie groß ist das Moment des auf die Spule einwirkenden Kräftepaares, wenn durch die Spule ein Strom der Stärke $I = 4$ A fließt?

Lösung

Die auf die einzelnen Leiterabschnitte wirkende Kraft ist

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B}.$$

Auf die Leiter der Länge b wirkt keinerlei Kraft ein, da sie genau in Feldrichtung gelegen sind. Aber auf die Leiter der Länge a wirken gleich große Kräfte aus entgegengesetzten Richtungen, wodurch ein Kräftepaar entsteht, das die Spule um die Achse 00, die durch die Mitten der Seitenlängen b verläuft, zu drehen bestrebt ist.
Die auf den Leiter der Länge a, der senkrecht zur Richtung der magnetischen Induktion orientiert ist, wirkende Kraft hat den Wert

$$F = BIa,$$

und auf 50 solcher Leiter wirkt dann insgesamt

$$F_{50} = 50\,BIa.$$

Die Größe des Moments eines Kräftepaares ist durch das Produkt einer Kraft und des senkrecht gemessenen Abstands zweier Kräfte gegeben, also in unserem Falle

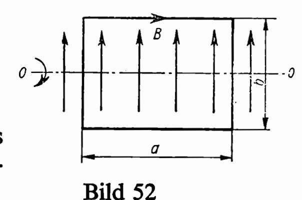


Bild 52

$$M = F_{50}b.$$

$$M = 50\,BIab = 50 \cdot 0{,}2\ \mathrm{Vs\,m^{-2}} \cdot 4\ \mathrm{A} \cdot 0{,}03\ \mathrm{m} \cdot 0{,}02\ \mathrm{m} =$$
$$= 240 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Nm} = \underline{0{,}024\ \mathrm{Nm}}.$$

69. Eine kreisförmige Leiterwindung vom Radius $r = 6$ cm wird vom Strom $I = 50$ A durchflossen, während sie sich in einem Magnetfeld der Stärke $H = 478\,000$ A/m befindet. Es ist das auf die Spule wirkende Drehmoment für zwei verschiedene Stellungen zu bestimmen:

a) die Spulenebene liegt parallel zur Feldrichtung,

b) die Normale der Spulenebene schließt mit der Feldrichtung einen Winkel $\beta = 30°$ ein.

Lösung

Wir gehen wieder von der Beziehung

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B}$$

aus bzw. von

$$\mathrm{d}F = I\,\mathrm{d}s\,B \sin \varphi.$$

Aus Bild 53a entnehmen wir $\mathrm{d}s \cdot \sin \varphi = \mathrm{d}x$, können also weiter schreiben

$$\mathrm{d}F = IB\,\mathrm{d}x.$$

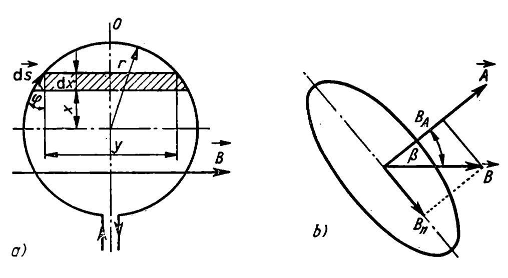


Bild 53

Da eine gleich große Kraft von entgegengesetzter Richtung auf das bezüglich der O-Achse symmetrisch gelegene Leiterelement wirkt, das vom gleichen Strom in umgekehrter Richtung durchflossen wird, wirkt auf beide mechanisch verbundene Leiterelemente ein Kräftepaar mit dem Moment

$$\mathrm{d}M = \mathrm{d}Fy = IBy\,\mathrm{d}x = IB\,\mathrm{d}A,$$

wobei $\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$ die in Bild 53a schraffiert gezeichnete Fläche ist.
Das Moment der auf die gesamte Windung wirkenden Kräfte erhalten wir durch Integration zu

$$M = IBA = \mu_0 HIA,$$

wobei A die gesamte, von der Leiterschleife umschlossene Fläche darstellt. Der abgeleitete Ausdruck gilt für den Fall, daß die Windungsebene in die Richtung der magnetischen Induktion fällt.
Wenn aber der Vektor der magnetischen Induktion $\vec{B}$ mit dem Normalenvektor $\vec{A}$ der Fläche den Winkel β einschließt (Bild 53b), müssen wir den Vektor der Induktion in zwei Komponenten zerlegen: in die Richtung des Normalenvektors ($\vec{B}_A$) und in die Richtung der Fläche selbst ($\vec{B}_{||}$). Während die Komponente $\vec{B}_A$ solche Kräfte hervorruft, welche die Windung einem allseitigen Druck aussetzen, also keinerlei Drehwirkung auslösen, gilt für die Komponente $\vec{B}_{||}$

$$|\vec{B}_{||}| = B \sin \beta.$$

Den Wert dieser Komponente setzen wir an Stelle von B in den Ausdruck für das Drehmoment M ein und erhalten

$$M = IAB \sin \beta = \mu_0 HIA \sin \beta.$$

Durch Einsetzen der gegebenen Werte ergeben sich für die beiden in der Aufgabe genannten Sonderfälle folgende Rechnungen:

a) $$M = \mu_0 HIA = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Vs A}^{-1}\,\text{m}^{-1} \cdot 478000\,\frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 50\ \text{A} \cdot \pi \cdot 0{,}06^2\ \text{m}^2 = \underline{0{,}339\ \text{Nm}};$$

b) $$M = \mu_0 HIA \sin\beta = 4\,\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Vs A}^{-1}\,\text{m}^{-1} \cdot 478000\,\frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 50\ \text{A} \cdot \pi \times 0{,}06^2\ \text{m}^2 \cdot 0{,}5 = \underline{0{,}169\ \text{Nm}}.$$

70. Ein Leiter in Gestalt zweier kreisförmiger Windungen mit dem Radius $r = 5$ cm liegt in einem Magnetfeld, dessen Induktion den Wert $B = 0{,}6$ Wb m^{-2} hat, senkrecht zur Richtung der magnetischen Induktion. Welche Spannung wird in einem solchen Leiter induziert, wenn das Magnetfeld innerhalb einer Zeitspanne von 0,5 s gleichförmig abgebaut wird?

Lösung

Da entsprechend dem Induktionsgesetz die induzierte Spannung gleich der negativen Änderung des Induktionsflusses in der Zeit ist, wird

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi - \Phi_0}{\Delta t}.$$

Nach Ablauf der Zeit Δt ist $\Phi = 0$. Zu Beginn des Vorgangs, da die beiden Windungen sich noch im vollen Magnetfeld befinden, gilt

$$\Phi_0 = NAB$$

(N Windungszahl, A Fläche der Windung). Es ergibt sich somit

$$\Phi_0 = 2\pi r^2 B = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}05^2\ \text{m}^2 \cdot 0{,}6\ \text{Wb m}^{-2} = 0{,}00942\ \text{Wb}.$$

Für den Wert der induzierten Spannung erhalten wir schließlich

$$U_i = -\frac{(0 - 0{,}00942)\ \text{Wb}}{0{,}5\ \text{s}} = \underline{0{,}01884\ \text{V}}.$$

71. Eine rechteckig geformte Leiterschleife (Bild 54) wird, in einem Magnetfeld der Feldstärke $H = 5000$ Oe liegend, mit einer Frequenz $f = 30$ s^{-1} um ihre Seite a gedreht. Welche mittlere Spannung wird während einer halben Umdrehung in der Leiterschleife induziert? ($a = 0{,}3$ m, $b = 0{,}2$ m)

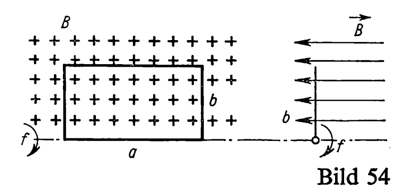


Bild 54

Lösung

Eine halbe Umdrehung wird in der Zeit

$$t = \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} \frac{1}{f} = \frac{1}{2f}$$

ausgeführt. Während dieser Zeitspanne ändert sich der Induktionsfluß vom Wert Φ_m auf den Wert $-\Phi_m$, also um den Betrag

$$\Delta\Phi = \Phi_m - (-\Phi_m) = 2\Phi_m,$$

so daß wir, entsprechend dem Induktionsgesetz, die gesuchte mittlere Induktionsspannung wie folgt erhalten:

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{dt} = -\frac{2\Phi_m}{0 - \frac{1}{2f}} = 4f\,\Phi_m.$$

Da $\Phi_m = B_m A$ und die Gesamtfläche $A = ab$ ist, erhalten wir für die mittlere induzierte Spannung

$$U_i = 4fB_m ab = 4abf\mu_0 H = 4 \cdot 30\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}3\ \mathrm{m} \cdot 0{,}2\ \mathrm{m} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs\ A^{-1}\,m^{-1}} \times$$
$$\times\ 5000 \frac{10^3}{4\pi} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \underline{3{,}6\ \mathrm{V}}.$$

72. Ein Trommelanker, der sich in einem Magnetfeld mit der Induktion $B = 0{,}8\ \mathrm{Wb\,m^{-2}}$ dreht, enthält in einer Rille 20 in Serie geschaltete Leiter von je $s = 20$ cm Länge. Der Trommelanker hat einen Durchmesser $d = 10$ cm und rotiert mit einer Tourenzahl $n = 1300\ \mathrm{min}^{-1}$. Es soll bestimmt werden, welche Maximalspannung in der gesamten Ankerwicklung induziert wird. Es ist weiter die Richtung der Spannung zu ermitteln für den Fall, daß die Trommel eine Rechtsdrehung im senkrecht gerichteten Magnetfeld ausführt (Bild 55).

Bild 55

Lösung

Wir gehen von der Beziehung

$$U_i = Blv$$

aus, welche die Größe der induzierten Spannung in einem Leiter, der sich mit der Geschwindigkeit v im Magnetfeld der Induktion B bewegt, angibt. Da die einzelnen Leiter am Trommelumfang angeordnet sind, ist die Geschwindigkeit, mit der der Leiter durch das Magnetfeld bewegt wird, gleich der Umfangsgeschwindigkeit, die der Trommelanker mit dem Durchmesser d bei gleichförmiger Kreisbewegung hat, nämlich

$$v = \pi dn = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}1\ \mathrm{m} \cdot 1300\ \mathrm{min}^{-1}}{60\ \mathrm{s\ min}^{-1}} = 6{,}807\ \mathrm{m\,s}^{-1}.$$

Demnach wird die maximale, in einem Leiter induzierte Spannung den Wert

$$U_{i1} = Blv = 0{,}8 \text{ Vs m}^{-2} \cdot 0{,}2 \text{ m} \cdot 6{,}8 \text{ m s}^{-1} = 1{,}089 \text{ V}$$

annehmen. Da die einzelnen Leiter in Serie geschaltet sind, addieren sich die induzierten Spannungen, so daß die gesamte maximale Induktionsspannung, die der Dynamo erzeugt, den Wert

$$U_i = 20\, U_{i1} = 20 \cdot 1{,}089 \text{ V} = \underline{21{,}78 \text{ V}}$$

hat. Die Richtung der induzierten Spannung bestimmen wir entsprechend der Ableitung des Induktionsgesetzes aus dem Vektorprodukt

$$(\vec{v} \times \vec{B})$$

oder entsprechend der bekannten Rechte-Hand-Regel, die eigentlich aus dem angeführten Vektorprodukt von Geschwindigkeit und Induktionsflußdichte resultiert. Die Richtung der in den einzelnen Leitern induzierten Spannung entspricht der in Bild 55 angegebenen. Dabei bedeutet das Symbol (+) den Strom, der in Richtung vom Betrachter wegfließt.

73. Ein gerader Leiter der Länge $l = 15$ cm rotiert in einem homogenen Magnetfeld, dessen Induktion den Wert $B = 0{,}5$ T hat, mit einer Frequenz $f = 60 \text{ s}^{-1}$ in einer senkrecht zur magnetischen Feldrichtung gelegenen Ebene um eine durch seinen Endpunkt verlaufende Achse (Bild 56). Welche Spannung wird dabei in ihm induziert?

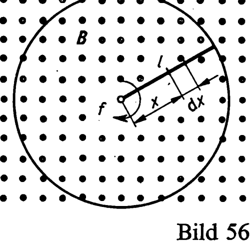


Bild 56

Lösung

Wir wenden das Induktionsgesetz an in der Form

$$U_i = B\,x\,v$$

(B magnetische Induktion, x Länge des Leiters, v seine Geschwindigkeit). In Bild 56 hat das im Abstand x von der Drehachse liegende Leiterelement dx bei der Frequenz f eine Geschwindigkeit, die der Umfangsgeschwindigkeit einer Kreisbewegung gleich ist, nämlich

$$v = 2\pi x f.$$

Daher nimmt die im Leiterelement dx induzierte Spannung den Wert

$$dU_i = Bv\, dx = B \cdot 2\pi x n\, dx$$

an. Für die gesamte im Leiter der Länge l induzierte Spannung erhalten wir demnach

$$U_i = 2\pi\, nB \int_0^l x\, dx = \pi f B l^2 = 3{,}14 \cdot 60 \text{ s}^{-1} \cdot 0{,}5 \text{ Vs m}^{-2} \cdot 0{,}15^2 \text{ m}^2 = \underline{2{,}12 \text{ V}}.$$

74. Es soll die mit einer FORBESschen Maschine erzeugte Induktionsspannung berechnet werden. Es handelt sich hierbei um eine Metallscheibe, die in einem durch einen Spezial-

magneten geschaffenen homogenen Magnetfeld rotiert. Der homogene Bereich des Magnetfeldes erstreckt sich auf einen Streifen zwischen $r = 5$ cm und $r' = 15$ cm, von der Drehachse aus gemessen. Die Induktion hat hier den Wert $B = 1\ \mathrm{Wb\,m^{-2}}$. Die Scheibe rotiert mit einer Tourenzahl $n = 2000\ \mathrm{min^{-1}}$ (Bild 57).

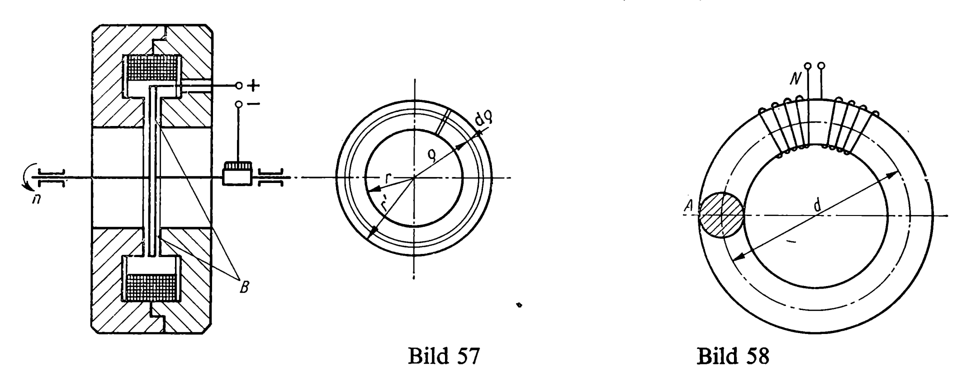


Bild 57 Bild 58

Lösung

Wir denken uns die Metallscheibe in lauter radial liegende Leiter zerlegt, in denen infolge ihrer Bewegung mit der Geschwindigkeit v im Magnetfeld mit der Induktion B eine Spannung induziert wird. In einem Leiterelement der Länge $d\varrho$ beträgt die induzierte Spannung

$$dU_i = Bv\, d\varrho.$$

Wir drücken die Geschwindigkeit des in einem Abstand ϱ von der Drehachse liegenden Leiterelements durch die Tourenzahl aus:

$$v = 2\pi\varrho n.$$

Dann wird

$$dU_i = 2\pi\varrho n B\, d\varrho,$$

und die in einem ganzen (gedachten) Leiter der Länge $l = r' - r$ induzierte Spannung erreicht den Wert

$$U_i = 2\pi n B \int\limits_r^{r'} \varrho\, d\varrho = 2\pi n B \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_r^{r'} = \pi B n\,(r'^2 - r^2).$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte erhalten wir für die induzierte Spannung

$$U_i = \pi \cdot 1\ \mathrm{Vs\,m^{-2}}\ \frac{2000}{60\ \mathrm{s}}\,(0{,}15^2\ \mathrm{m^2} - 0{,}05^2\ \mathrm{m^2}) = \underline{2{,}094\ \mathrm{V}}.$$

75. Eine geschlossene Spule hat die Form eines Ringes. Auf einen ringförmigen Eisenkern (mittlerer Durchmesser $d = 0{,}2$ m, Permeabilität $\mu = 700\,\mu_0$, Querschnittsfläche $A_i = 25\ \mathrm{cm^2}$) sind $N = 1000$ Windungen aufgewickelt, durch die ein Strom $I = 1$ A fließt. Wie groß ist die Induktivität einer solchen Ringspule (Bild 58)?

Lösung

Um die Induktivität ausrechnen zu können, müssen wir zunächst den Wert der magnetischen Feldstärke kennen. Das Magnetfeld entsteht durch eine Spule mit dem Radius r und der Windungszahl N unter Einfluß der Stromstärke I. Wir gehen von der Durchflußgleichung aus, wobei wir berücksichtigen, daß der Integrationsweg mit dem Leiter N-mal gekoppelt ist. Das bedeutet also

$$NI = \oint H \, \mathrm{d}s,$$

wobei die Integration über die gesamte geschlossene mittlere Feldlinie des Magnetkreises erfolgen muß. Nach Integration über die Kreislinie vom Radius $r = d/2$ erhalten wir

$$NI = 2\pi rH,$$

also die Feldstärke

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{1000 \cdot 1 \text{ A}}{2\pi \cdot 0{,}1 \text{ m}} = \frac{5}{\pi} 10^3 \text{ A m}^{-1}.$$

Der Induktionsfluß Φ durch die von einer Leiterwindung umschlossene Fläche wird

$$\Phi = LI.$$

Daraus erhalten wir die gesuchte Induktivität

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{BA}{I} = \frac{BNA_1}{I} = \frac{\mu HNA_1}{I}$$

(B magnetische Induktion, A Gesamtflächeninhalt, durch den der Strom fließt, A_1 Flächeninhalt einer einzelnen Leiterwindung, N Windungszahl). Die magnetische Induktion B haben wir als Produkt der magnetischen Feldstärke H und der Permeabilität $\mu = \mu_0\mu_r$ ausgedrückt. Nach Einsetzen der vorgegebenen Werte erhalten wir schließlich

$$L = \frac{\mu_0\mu_r HNA_1}{I} =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1} \cdot 700 \cdot \frac{5}{\pi} \cdot 10^3 \text{ A m}^{-1} \cdot 1000 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{1 \text{ A}} =$$

$$= 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \text{ H} = \underline{3{,}50 \text{ H}}.$$

76. Berechnen Sie die Spannung, die in einer Spule mit der Induktivität $L = 0{,}06$ H induziert wird, wenn ein sie durchsetzender Strom gleichförmig so anwächst, daß er in jeder Sekunde um die Differenz $\Delta I = 10$ A zunimmt.

Lösung

Für die Selbstinduktionsspannung gilt die folgende Beziehung:

$$U_i = -L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \quad \text{bzw.} \quad U_i = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Wenn wir die gegebenen Werte hier einsetzen, erhalten wir

$$U_i = -0{,}06\,\mathrm{H}\,\frac{10\,\mathrm{A}}{1\mathrm{s}} = \underline{-0{,}6\,\mathrm{V}}.$$

Das negative Vorzeichen im Resultat bedeutet, daß die induzierte Spannung dem Erzeugerstrom entgegengerichtet ist.

77. Eine kreisringförmige Spule besteht aus einem Kern mit rechteckigem Querschnitt (Bild 59), auf den dicht übereinander zwei Wicklungen, eine mit der Windungszahl N_1 und eine mit der Windungszahl N_2, aufgebracht sind. Es soll eine Beziehung für die gegenseitige Induktion dieser beiden Wicklungen hergestellt werden.

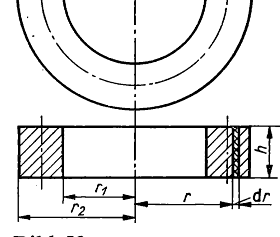


Bild 59

Lösung

Wir gehen von der Durchflußgleichung für den Fall aus, daß durch die Spule mit der Windungszahl N_1 der Strom I_1 fließt, es ist also

$$\oint H\,\mathrm{d}s = N_1 I_1.$$

Wir müssen entlang der ganzen mittleren magnetischen Feldlinie, die einen Kreis darstellt, integrieren. Das ergibt

$$\oint H\,\mathrm{d}s = H \cdot 2\pi\, r.$$

Für die Stärke, die das Magnetfeld auf einer beliebigen Kreislinie im Kern annimmt, können wir schreiben

$$H = \frac{N_1 I_1}{2\pi r}.$$

Durch eine infinitesimale Querschnittsfläche des Spulenkerns

$$\mathrm{d}A = h\,\mathrm{d}r$$

fließt ein Induktionsfluß, den wir als homogen ansehen können und der die Stärke

$$\mathrm{d}\Phi = B\,\mathrm{d}A = \mu_0\mu_r H h\,\mathrm{d}r = \mu_0\mu_r \frac{N_1 I_1}{2\pi r}\,h\,\mathrm{d}r$$

hat. Durch den gesamten rechteckigen Querschnitt des Spulenkerns tritt ein Induktionsfluß mit der Gesamtstärke

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} N_1 I_1 h \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} N_1 I_1 h \ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Dieser Induktionsfluß durchsetzt auch die N_2 Windungen der zweiten Wicklung, so daß durch sie der Induktionsfluß

$$\Phi_{L1,2} = \Phi N_2 = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} N_1 N_2 I_1 h \ln\frac{r_2}{r_1}$$

tritt. Die gesuchte gegenseitige Induktion der beiden Spulen wird im Sinne der Definition durch folgende Beziehung angegeben:

$$L = \frac{\Phi_{L1,2}}{I_1} = \frac{\Phi_{L2,1}}{I_2} = \underline{\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} N_1 N_2 \, h \ln \frac{r_2}{r_1}}\,.$$

78. Eine Spule der Länge $l = 0{,}5$ m wird aus $N = 10000$ Windungen gebildet, deren jede einen Durchmesser $d = 6$ cm hat. Die Spule wird von einem Strom der Stärke $I = 2$ mA durchflossen. Es ist der Energieinhalt des an der Spule entstehenden Magnetfeldes zu berechnen.

Lösung

Für die Energie des Magnetfeldes eines elektrischen Stroms gilt die Beziehung

$$W = \frac{1}{2} L I^2 .$$

Wir müssen also zur Berechnung des Energieinhalts des Feldes die Induktivität L der Spule kennen. Sie ist durch

$$L = \frac{\Phi_{\text{ges}}}{I}$$

gegeben, wobei Φ_{ges} der gesamte, durch alle Windungen der Spule tretende Induktionsfluß ist. Es gilt weiter der Zusammenhang

$$\Phi_{\text{ges}} = N\Phi = NBA = N\mu_0 HA,$$

wobei Φ der durch die Fläche einer einzigen Windung tretende Induktionsfluß und H die magnetische Feldstärke der Spule ist, die wir aus Gründen der Vereinfachung im Querschnitt einer jeden Windung als gleich groß ansehen dürfen. Für die Feldstärke gilt nach dem Durchflußgesetz

$$Hl = NI, \quad \text{d. h.,} \quad H = \frac{NI}{l},$$

so daß sich für L ergibt

$$L = \frac{\Phi_{\text{ges}}}{I} = \frac{N\mu_0 HA}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} =$$

$$= \frac{4\,\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Vs A}^{-1}\,\text{m}^{-1} \cdot 10\,000^2 \,\frac{\pi \cdot 0{,}06^2\ \text{m}^2}{4}}{0{,}5\ \text{m}} = 0{,}71\ \text{H}.$$

Für den gesuchten Wert der Energie des Magnetfeldes erhalten wir somit

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\, 0{,}71\ \text{H} \cdot 0{,}002^2\ \text{A}^2 = \underline{1{,}42 \cdot 10^{-6}\ \text{J}}.$$

79. Der Eisenkern eines Elektromagneten hat eine Querschnittsfläche von $6 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2$. An der Berührungsfläche mit einer anhängenden Last erreicht die magnetische Induktion den Wert $B = 0{,}3\,\mathrm{Wb\,m^{-2}}$. Es ist eine Beziehung für die Tragfähigkeit des Elektromagneten zu ermitteln und diese für den angegebenen Fall in Zahlen auszudrücken.

Lösung

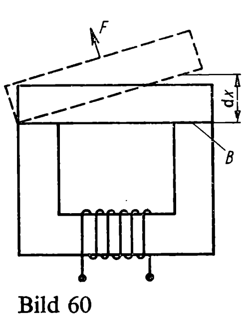


Bild 60

Wenn wir in Bild 60 den Anker um ein infinitesimal kleines Wegelement dx vom Magnetpol entfernen und dabei gleichzeitig den Spulenstrom in der Weise erhöhen, daß sich der Induktionsfluß im Kreis nicht ändert, sondern konstant gehalten wird, dann ändert sich auch nicht die Kraft F, mit welcher der Anker an den Pol herangezogen wird und die wir bei der Bewegung überwinden müssen. Dabei verrichten wir die Arbeit

$$dW = F\,dx.$$

Damit sich der Induktionsfluß bei einer Vergrößerung der mittleren Länge der Feldlinien um den Betrag dx nicht ändert, ist es erforderlich, den Strom um genau den Betrag zu erhöhen, der dem Produkt $H\,dx$ entspricht. Im entstehenden Luftspalt erhöht sich dabei die Energie des Magnetfeldes, die gegeben ist durch

$$W = \frac{1}{2} L I^2.$$

Da weiter

$$L = \frac{\Phi_L}{I}$$

ist, wobei $\Phi_L = N\Phi$ den gesamten Induktionsfluß durch alle Windungen der Spule und Φ den Induktionsfluß durch eine einzige Windung darstellt, wird

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi_L}{I} I^2 = \frac{1}{2} I N \Phi.$$

Unter Einbeziehung der magnetischen Feldstärke erhalten wir die Beziehung

$$Hx = IN,$$

wobei x die Länge einer Feldlinie bedeutet, so daß wir weiterhin schreiben können

$$W = \frac{1}{2} Hx\Phi.$$

Die erwähnte Vergrößerung der Energie des Magnetfeldes infolge einer Stromstärkesteigerung entsprechend $H\,dx$ hat den Wert

$$dW = \frac{H\,dx\,\Phi}{2}.$$

Hieraus entsteht durch Umformung der Ausdruck

$$\mathrm{d}W = \frac{B^2 A \,\mathrm{d}x}{2\mu_0},$$

wenn wir voraussetzen:

$$\Phi = BA \quad \text{und} \quad H = \frac{B}{\mu_0}.$$

In diesem Falle ist B die magnetische Induktion im Luftspalt zwischen den Berührungsflächen. Das Gesetz von der Erhaltung der Energie verlangt im vorliegenden Falle, daß die zum Entfernen des Ankers aufgewendete Arbeit gleich der Vergrößerung der im Magnetfeld enthaltenen Energie ist. Das heißt

$$F\,\mathrm{d}x = \frac{B^2 A}{2\mu_0}\,\mathrm{d}x.$$

Daraus erhalten wir eine Beziehung für die Tragkraft des Magneten, nämlich

$$\underline{F = \frac{B^2 A}{2\mu_0}},$$

wobei A die Berührungsfläche, der Querschnitt des Pols ist. Nach Einsetzen der gegebenen Werte finden wir

$$F = \frac{0{,}3^2 \left(\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\right)^2 24 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}}} = \frac{0{,}09 \cdot 24}{25{,}12}\,10^3\,\mathrm{N} \approx \underline{86\,\mathrm{N}}.$$

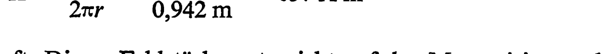
80. Wie groß ist der magnetische Widerstand eines gußeisernen Magnetkreises mit den Abmessungen $r = 15$ cm und $A = 5$ cm^2 (Bild 61), wenn durch die Spule mit $N = 200$ Windungen der Strom $I = 3$ A fließt?

Lösung

Die Durchflußgleichung hat für unseren Fall die Form

$$H \cdot 2\pi r = IN.$$

Wir finden also, daß der durch die N Windungen fließende Strom I im Kern eine Feldstärke



$$H = \frac{IN}{2\pi r} = \frac{3\,\mathrm{A} \cdot 200}{0{,}942\,\mathrm{m}} = 637\,\mathrm{A\,m^{-1}}$$

Bild 61

hervorruft. Dieser Feldstärke entspricht auf der Magnetisierungskurve des Gußeisens (Bild 50) eine magnetische Induktion $B = 0{,}46$ Wb m^{-2}.

Für den magnetischen Widerstand erhalten wir gemäß der HOPKINSschen Formel

$$R_m = \frac{1}{\mu}\,\frac{s}{A} = \frac{1}{\frac{B}{H}}\,\frac{2\pi r}{A} = \frac{H}{B}\,\frac{2\pi r}{A} =$$

$$= \frac{637\ \mathrm{A\,m^{-1}} \cdot 2\,\pi \cdot 0{,}15\ \mathrm{m}}{0{,}46\ \mathrm{Wb\,m^{-2}} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}} = \underline{2{,}61 \cdot 10^6\ \mathrm{A\,Wb^{-1}}}.$$

81. Welcher Strom muß durch eine Spule mit der Windungszahl $N = 300$ fließen, die auf einen Kern aus Trafoblech (4% Si-Gehalt) gewickelt wurde, damit in dem 0,5 mm breiten Spalt ein magnetischer Induktionsfluß der Stärke $\Phi = 0{,}00066$ Wb auftritt? (Die Maße in Bild 62 sind in Millimetern angegeben.)

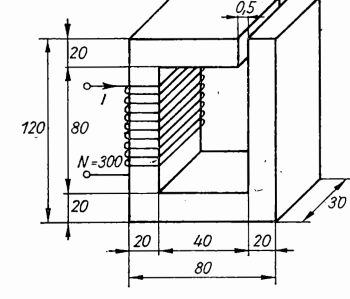


Bild 62

Lösung

Wir bestimmen zunächst die Stärke der magnetischen Induktion

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0{,}00066\ \mathrm{Wb}}{20 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot 30 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}} =$$

$$= 1{,}1\ \mathrm{Wb\,m^{-2}}.$$

Aus der Magnetisierungskurve des Trafobleches (Bild 50) entnehmen wir, daß zur Induktion $B = 1{,}1\ \mathrm{Wb\,m^{-2}}$ die Feldstärke $H \approx$ $\approx 400\ \mathrm{A\,m^{-1}}$ gehört. Im Luftspalt ist die Feldstärke

$$H_{Sp} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi\,10^{-7}}\,B = \frac{1{,}1}{4\pi\,10^{-7}}\ \mathrm{A\,m^{-1}} = 8{,}75 \cdot 10^5\ \mathrm{A\,m^{-1}}.$$

Für unseren Fall nimmt die Durchflußgleichung folgende Form an:

$$IN = H_{Fe}s_{Fe} + H_{Sp}\,\delta.$$

Daraus ergibt sich

$$I = \frac{H_{Fe}s_{Fe} + H_{Sp}\delta}{N},$$

wobei s_{Fe} die Länge der mittleren Feldlinie im Eisen bedeutet, also

$$s_{Fe} = [2\,(40 + 20) + 2\,(80 + 20) - 0{,}5] \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 319{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte und des Ergebnisses für die Länge s_{Fe} finden wir

$$I = \frac{400\ \mathrm{A\,m^{-1}} \cdot 319{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} + 8{,}75 \cdot 10^5\ \mathrm{A\,m^{-1}} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}{300} = \underline{1{,}884\ \mathrm{A}}.$$

82. Ein Hufeisen-Elektromagnet mit den in Bild 63 angegebenen Maßen in *mm* soll aus einer Entfernung $\delta = 1$ cm einen Anker anziehen können, der eine Last von 250 kg trägt. Welche Stromstärke muß dazu in der Spule, deren Windungszahl $N = 500$ beträgt, fließen?

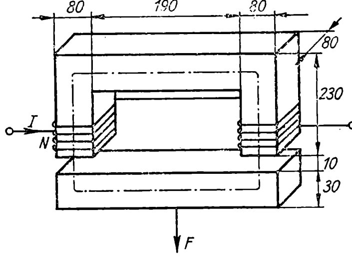


Bild 63

Lösung

Nach der Beziehung, die wir in Beispiel 79 für die Tragkraft eines Elektromagneten abgeleitet haben, läßt sich die magnetische Induktion wie folgt ausdrücken:

$$B = \sqrt{\frac{2\mu_0 F}{A}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 250 \cdot 9{,}81}{2 \cdot 80 \cdot 80 \cdot 10^{-6}}} \text{ Wb m}^{-2} \approx 0{,}7 \text{ Wb m}^{-2}.$$

Um diese Induktion im Eisen zu erzielen, ist eine Feldstärke notwendig, für die wir aus der Kurve für Eisenblech in Bild 50 entnehmen:

$$H_{Fe} = 140 \text{ A m}^{-1}.$$

Dagegen wird im Luftspalt zur Erzielung der magnetischen Induktion die Feldstärke

$$H_{Sp} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} B \approx 8 \cdot 10^5 B = 8 \cdot 0{,}7 \cdot 10^5 \text{A m}^{-1} = 5{,}6 \cdot 10^5 \text{A m}^{-1}$$

erforderlich sein. Aus der Durchflußgleichung resultiert für unser Beispiel die Beziehung

$$IN = H_{Fe} s_{Fe} + H_{Sp} s_{Sp},$$

wobei die Länge der mittleren Feldlinie in Luft den Wert

$$s_L = 2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

und in Eisen

$$s_{Fe} = [2\,(190 + 80) + 2 \cdot 230] \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ m}$$

hat. Wir finden somit für die Stromstärke den Wert

$$I = \frac{H_{Fe} s_{Fe} + H_L s_L}{N} = \frac{140 \text{ A m}^{-1} \cdot 1 \text{ m} + 5{,}6 \cdot 10^5 \text{ A m}^{-1} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{500} =$$

$$= \underline{22{,}68 \text{ A}}$$

A Aufgaben

97. Ein sehr langer gerader Leiter, durch den ein Strom $I = 10$ A fließt, bildet in einem bestimmten Punkt eine kreisförmige Windung mit dem Radius $r = 4{,}28$ cm aus, die mit dem Stromleiter zusammen in einer Ebene liegt (Bild 64). Berechnen Sie die Stärke der

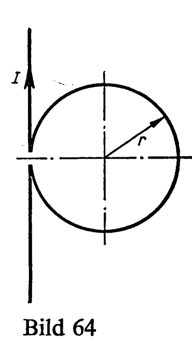


Bild 64

Induktion im Mittelpunkt der dargestellten Windung.

98. Zwei unendlich lange, gerade, parallel zueinander verlaufende Leiter sind 10 cm voneinander entfernt. Sie werden beide vom gleichen Strom $I = 2$ A in gleicher Richtung durchflossen. Es ist die Stärke der Induktion in einem Punkt zu bestimmen, der auf der senkrechten Verbindungslinie beider Leiter, 4 cm von dem einen entfernt, gelegen ist.

99. Zwei ebene, kreisförmige Leiter mit den Radien $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 15$ cm sind koaxial angeordnet (Bild 65). Sie werden von den Strömen $I_1 = 2$ A, $I_2 = 5$ A gleichsinnig durchflossen. Die beiden Ströme erregen in ihrer Umgebung ein Magnetfeld. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke in einem Punkt P auf der Verbindungsachse beider Leiter mit den Koordinaten $x_1 = 5$ cm, $x_2 = 10$ cm.

100. Welcher Strom fließt durch einen langen, geraden Leiter, wenn in einem senkrecht gemessenen Abstand von 20 cm im Vakuum eine Induktion vom Betrag $B = 15 \cdot 10^{-4}$ Wb m^{-2} gemessen wird?

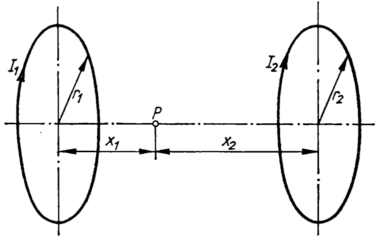


Bild 65

101. Ermitteln Sie den Wert der magnetischen Induktion im Mittelpunkt einer Spule, die 20 Windungen bei einer Länge von 10 cm hat und dabei vom Strom $I = 5$ A durchflossen wird. Wie groß ist der gesamte, durch die Windungen tretende Induktionsfluß bei einem Spulenquerschnitt von $A = 5\,\text{cm}^2$?

102. Zwei gerade, parallele Leiter haben voneinander den Abstand $s = 1$ cm. Der eine von beiden ist sehr lang und wird vom Strom $I_1 = 250$ A durchflossen, der andere hat nur eine Länge von $l = 20$ cm und wird vom Strom $I_2 = 300$ A durchflossen. Beide befinden sich im Vakuum. Welche anziehende Kraft wirkt zwischen ihnen?

103. Ein gerader Leiter von 10 cm Länge, durch den ein Strom von 10 A fließt, befindet sich, senkrecht zur Feldrichtung liegend, in einem Magnetfeld, dessen Induktion den Wert $B = 1$ T hat. Welche Kraft wirkt auf den Leiter?

104. In einem homogenen Magnetfeld mit horizontaler Feldlinienrichtung ist senkrecht zum Feld, aber gleichfalls hori-

zontal orientiert, ein Leiter aufgehängt, der je Zentimeter Länge eine Masse von 0,1 kg hat. Er wird von einem Strom von 1 A Stärke durchflossen. Welchen Wert muß die magnetische Induktion des Feldes annehmen, damit der stromführende Leiter gerade in der Schwebe gehalten wird?

105. Eine kreisrunde Kupferscheibe mit dem Radius $r = 10$ cm ist, um eine horizontale Achse drehbar, so gelagert, daß ihr äußerster Rand gerade in ein Quecksilberbad eintaucht (Bild 66). Das

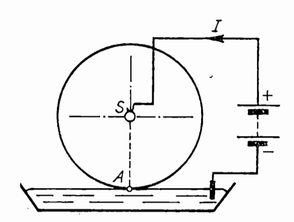


Bild 66

Quecksilber im Gefäß und ein Kontakt auf der Achse der Scheibe sind mit einer Akkubatterie verbunden. Die Scheibe befindet sich in einem senkrecht zu ihrer Ebene orientierten Magnetfeld mit der Induktion $B = 0{,}2$ T. Durch den so geschaffenen Stromkreis fließt ein Strom $I = 1$ A. Wie groß ist das Drehmoment der auf die Scheibe wirkenden Kräfte, und in welcher Richtung wird sich die Scheibe drehen, wenn die Richtung der Induktion vom Betrachter fortweist?

106. Die magnetische Induktion eines homogenen Magnetfeldes hat den Wert $B = 15\ \mathrm{Wb\,m^{-2}}$. Ermitteln Sie die Stärke des Induktionsflusses, der durch eine Fläche von $1\ \mathrm{dm^2}$ Größe tritt, deren Normale mit der Feldstärkerichtung einen Winkel $\varphi = 30°$ einschließt.

107. Bestimmen Sie den magnetischen Induktionsfluß in einem eisernen Werkstück von $A = 4\ \mathrm{cm^2}$ Querschnitt, dessen Permeabilitätszahl $\mu_r = 5000$ ist, wenn die magnetische Feldstärke den Wert $H = 15700$ A/m hat.

108. Ein kreisförmiger Magnetring aus Stahl wurde für einen Induktionsfluß $\Phi = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Wb aus zwei Teilen von unterschiedlichem Querschnitt projektiert: $A_1 = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^2}$ und $A_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^2}$ (Bild 67). Auf der

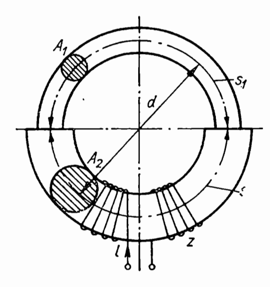


Bild 67

einen Ringhälfte vom Durchmesser $d = 0{,}318$ m wurde eine Spule mit der Windungszahl $z = 200$ gewickelt. Welcher Strom I muß durch diese Spule fließen, damit der geforderte Induktionsfluß Φ erreicht wird, wenn das Material Stahlguß ist?

109. Auf einen Stahlkern von der Form eines zylindrischen Ringes mit einer mittleren Feldlinienlänge $s = 0{,}628$ m und mit dem konstanten Querschnitt $A = 0{,}0012\ \mathrm{m^2}$ sind $N = 100$ Windungen aufgewickelt. Welcher Strom I muß in der Wicklung fließen, damit ein Induktionsfluß der Stärke $\Phi = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ Wb auftritt?

110. Auf einen Stahlkern konstanten Querschnitts mit einer mittleren Feldlinienlänge $s = 0{,}625$ m und einem Luftspalt der Dicke $\delta = 0{,}003$ m sind $N = 100$ Windungen aufgewickelt. Welcher Strom I muß in der Wicklung fließen, damit die magnetische Induktion den Wert $B = 1\ \mathrm{Wb\,m^{-2}}$ annimmt?

111. In einem homogenen Magnetfeld mit der Induktion $B = 0{,}2$ T rotiert in

der zu B senkrechten Ebene ein leitender Stab der Länge $l = 10$ cm gleichförmig. Die Drehachse ist senkrecht zum Stab gerichtet und verläuft durch ein Ende des Stabes. Mit welcher Tourenzahl muß der Stab rotieren, damit in ihm eine Induktionsspannung $U_i = 0{,}628$ V induziert wird?

112. Ein Stabmagnet, durch dessen Endquerschnitt ein Induktionsfluß der Stärke $\Phi = 0{,}0015$ Wb tritt, dreht sich um eine senkrechte Achse, und zwar so, daß der Induktionsfluß eine Spule mit $N = 10000$ Windungen schneidet (Bild 68). Eine halbe Umdrehung vollführt der Stabmagnet innerhalb 0,02 s. Bestimmen Sie den Durchschnittswert der in der Spule induzierten Induktionsspannung.

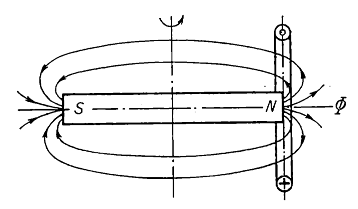


Bild 68

113. Ein Elektromagnet mit $N = 1000$ Windungen wird durch einen Strom $I = 0{,}5$ A gespeist. Der Widerstand der Wicklung hat den Wert $R = 10\ \Omega$. Die magnetische Induktion im Eisenkern ist $B = 1{,}2$ T. Der Kern hat einen Querschnitt $A = 100\ \text{cm}^2$. Wie groß ist die durch Selbstinduktion hervorgerufene Spannung, wenn der Strom für eine Zeit von 0,01 s unterbrochen wird?

114. Eine Spule hat die Induktivität $L = 0{,}06$ H. Ermitteln Sie die durch Selbstinduktion hervorgerufene Induktionsspannung für den Fall einer Stromänderung, wobei der Strom innerhalb 1 s um 11000 A ansteigt.

115. Ein kreisförmiger Leiter mit dem Radius r befindet sich in Ruhe in einem Magnetfeld, dessen Feldlinien senkrecht auf der Leiterebene stehen. Die Induktion des Magnetfeldes nimmt linear mit der Zeit ab. Zur Zeit $t = 0$ hat die Induktion den Wert $B = B_0$, zur Zeit $t = t_1$ ist $B = 0$. Welche Spannung wird in dem Leiter induziert?

116. Ein 30 cm langer, gerader Leiter bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v = 8\ \text{m s}^{-1}$ senkrecht zur Richtung eines homogenen Magnetfeldes der Induktion $B = 0{,}55$ T. Welche Spannung wird in dem Leiter induziert?

117. Eine rechteckige Leiterwindung mit den Abmessungen $a = 25$ cm, $b = 30$ cm rotiert um eine durch die Mitten der langen Seiten gehende Achse, die in Bild 69 senkrecht zur Richtung eines

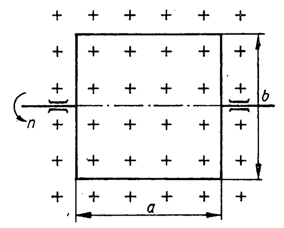


Bild 69

homogenen Magnetfeldes orientiert ist, mit einer Tourenzahl $n = 1200\ \text{min}^{-1}$. Die Feldstärke hat den Wert $H = 478000$ A/m. Bestimmen Sie den zeitlichen Mittelwert der dabei in der Windung induzierten Spannung.

118. Wie groß ist die Kraft, mit der ein Anker an den Polen eines Hufeisenmagneten festgehalten wird, dessen einer Pol eine Fläche $A = 0{,}01\ \text{m}^2$ hat, wenn die magnetische Induktion im Spalt zwischen Polen und Anker den Wert $B = 1{,}2\ \text{Wb m}^{-2}$ aufweist?

119. Stellen Sie eine Formel auf, aus der die Induktivität einer Ringspule von rechteckigem Querschnitt hervorgeht, die N Windungen hat. Die Spule entspricht der in Bild 59 dargestellten.

1.4. Wechselstrom und elektrische Schwingungen

Die Entstehung der induzierten elektrischen Wechselspannung verdeutlichen wir uns gewöhnlich an Hand einer einfachen Vorrichtung, in der sich ein rechteckiger, ebener Leiter mit dem Flächeninhalt A mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem Magnetfeld der Induktion B dreht. Er rotiert um eine Achse (Bild 70), welche die Mittelpunkte seiner gegenüberliegenden Seiten verbindet und senkrecht zur Richtung der magnetischen Induktion orientiert ist.

Für den Momentanwert der **elektrischen Wechselspannung** U, die in einem derartigen Rahmen induziert wird, gilt die Beziehung

$$U = U_0 \sin \omega t$$

Bild 70

(ω Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Rahmens, zugleich auch die Kreisfrequenz der induzierten Spannung, U_0 Höchstwert der induzierten Spannung). Der Höchstwert ist definiert durch

$$U_0 = \Phi\omega,$$

wobei Φ wiederum den Höchstwert des magnetischen Induktionsflusses darstellt, der durch die Fläche des Rahmens tritt, also $\Phi = BA$. Der Momentanwert des **elektrischen Stromes** I, der in einem Leiter durch die elektrische Wechselspannung hervorgerufen wird, ist durch

$$I = I_0 \sin (\omega t - \varphi)$$

gegeben. Dabei ist mit dem Symbol φ die Phasenverschiebung zwischen der Spannung und dem Strom ausgedrückt. Sie hängt von der Art des Stromverbrauchers (d. h. der Belastung) ab.

Die **Leistung des harmonischen Wechselstroms** P ist durch

$$P = UI \cos \varphi$$

gegeben (U Effektivwert der Spannung an den Leiterenden, I Effektivwert des durch den Leiter fließenden Stromes, $\cos \varphi$ Leistungsfaktor des Stromverbrauchers, d. h. der Cosinus der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom).

Den **Effektivwert** der Spannung U bzw. des Stromes I berechnen wir aus den jeweiligen Höchstwerten U_0 bzw. I_0 gemäß folgender Beziehung:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}; \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Die **Leiterspannung** U_s eines Dreiphasenstroms berechnen wir aus der **Phasenspannung** U_f bei der *Sternschaltung* gemäß der Beziehung

$$U_s = U_f\sqrt{3}.$$

Die entsprechenden Stromwerte erfüllen bei dieser Schaltung die Beziehung

$$I_s = I_f.$$

Dagegen gelten bei der *Dreieckschaltung* die Beziehungen

$$U_s = U_f; \quad I_s = I_f\sqrt{3}.$$

Für die **Leistung des Dreiphasenstroms** gilt ohne Bezugnahme auf die Art der Schaltung eines Stromverbrauchers die Beziehung

$$P = \sqrt{3}\, U_s I_s \cos\varphi.$$

(U_s und I_s Effektivwerte der Leiterspannung und des verketteten Stromes, $\cos\varphi$ *Leistungsfaktor* des jeweiligen Stromverbrauchers).
Da wir den Momentanwert der induzierten elektrischen Spannung

$$U = U_0 \sin\omega t$$

durch einen Komplexausdruck

$$U^* = U_0 \cos\omega t + \mathrm{i}\, U_0 \sin\omega t$$

ersetzen und somit in der GAUSSschen Zahlenebene ausdrücken können, ist es möglich, den Wert der induzierten Spannung als **rotierenden Zeiger** darzustellen. Das trifft für alle harmonisch veränderlichen Größen gleichermaßen zu, ohne Rücksicht darauf, ob sie einer Sinus- oder Cosinusfunktion folgen. Aus diesen Erwägungen heraus wurde die grafische Darstellung der harmonisch veränderlichen Größen entwickelt, deren wichtige Regeln wir im folgenden Beispiel veranschaulichen wollen.
Wir haben den Wechselstrom

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Man kann ihn durch einen Zeiger darstellen, der als Vektor in der komplexen Zahlenebene aufgefaßt werden kann, dessen Absolutbetrag den konstanten Wert I_0 hat, der zur Zeit $t' = 0$ in bezug auf die horizontale Achse eine Neigung unter dem Winkel φ (Phasenverschiebung) hat und mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse rotiert, die senkrecht zur Zeichenebene durch den Anfangspunkt 0 verläuft. Wir betrachten dabei die Umlaufrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn als die positive. Der

Momentanwert des Stromes ist dann zu einem bestimmten Augenblick gleich der Projektion des rotierenden Zeigers auf die Vertikale (Bild 71).
Der Momentanwert der Spannung

$$U = U_0 \sin \omega t$$

wird zur Zeit $t = 0$ als Zeiger der konstanten Größe $\vec{u}_0$ in Richtung einer horizontalen Achse dargestellt. Auch der Zeiger $\vec{u}^*$ rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω, wobei $\vec{I}^*$ bezüglich $\vec{u}^*$ denselben konstanten Wert der Phasenverschiebung φ beibehält.

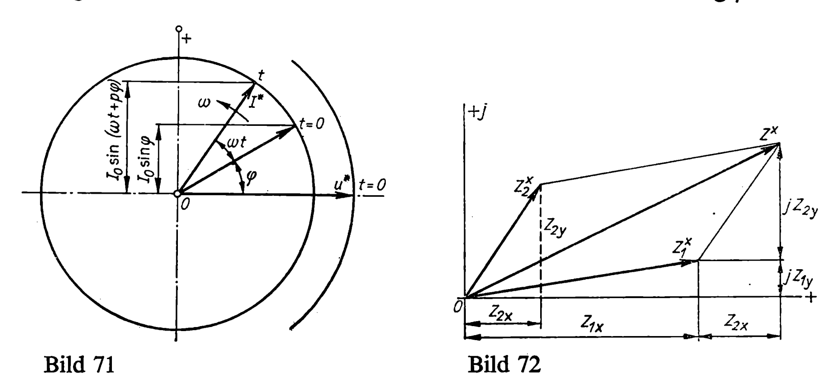


Bild 71 Bild 72

Komplexe Ausdrücke addieren wir, indem wir gesondert ihre jeweils reellen und imaginären Bestandteile addieren. Der resultierende komplexe Ausdruck hat daher einen Realteil, der sich aus den reellen Komponenten, und einen Imaginärteil, der sich aus den imaginären Komponenten zusammensetzt. Deshalb erhalten wir den resultierenden Zeiger $\vec{Z}^*$ aus zwei rotierenden Zeigern $\vec{Z}_1^*$ und $\vec{Z}_2^*$ in einem gegebenen Augenblick durch die Addition beider Zeiger wie bei gewöhnlichen Vektoren (Bild 72):

$$\vec{Z}^* = \vec{Z}_1^* + \vec{Z}_2^* = Z_{1x} + j Z_{1y} + Z_{2x} + j Z_{2y} = (Z_{1x} + Z_{2x}) + \\ + j (Z_{1y} + Z_{2y}).$$

Wenn die Wechselspannung

$$U = U_0 \sin \omega t$$

einem Reihenstromkreis mit dem ohmschen Widerstand R, der Induktivität L und der Kapazität C zugeleitet wird, dann fließt in diesem ein Strom vom Höchstwert

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

wobei der Strom gegenüber der Spannung um einen Phasenwinkel φ verzögert ist, der sich aus der Beziehung ergibt

$$\tan\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

Der Momentanwert des Stromes, der durch einen so aufgebauten Stromkreis fließt, folgt der Beziehung

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} (\sin \omega t - \varphi) =$$

$$= \frac{U_0}{Z} \sin(\omega t - \varphi).$$

Die Größe

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

bezeichnen wir als die *Impedanz* (den Scheinwiderstand) des Kreises. Wenn sich aber in einem Stromkreis nur der ohmsche Widerstand R befindet, d. h., $L = 0$, $C \to \infty$, dann ist

$$Z = R, \quad \varphi = 0^\circ, \quad I = \frac{U_0}{R} \sin \omega t.$$

Für den Fall, daß der Stromkreis nur die Induktivität L enthält, d. h., $R = 0$, $C \to \infty$, dann ergibt sich

$$Z = \omega L, \quad \varphi = 90^\circ,$$

$$I = \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t - \varphi).$$

Für den Fall, daß im Stromkreis nur die Kapazität C enthalten ist, daß also $R = 0, L = 0$, gilt schließlich

$$Z = \frac{1}{\omega C}, \quad \varphi = -90^\circ,$$

$$I = U_0 \, \omega C \sin(\omega t + \varphi).$$

Bild 73

In Bild 73 sind die Spannungszeiger (Spannungsabfälle) für die Größen R, L und C, also U_R^*, U_L^* und U_C^* (gestrichelt) grafisch dargestellt, desgleichen die Zeiger der

Klemmenspannungen $U_R^{*\prime}$, $U_L^{*\prime}$ und $U_C^{*\prime}$ (ausgezogene Linien), die für die Überwindung der angegebenen Widerstände erforderlich werden.

Nach dem in Bild 73 angedeuteten Dreieck erfüllen demnach die Impedanz des Stromkreises sowie der Tangens der resultierenden Phasenverschiebung die folgenden Beziehungen:

$$Z^2 I^2 = I^2 R^2 + I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2, \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$\tan\varphi = \frac{I\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{IR} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Wenn durch einen Stromkreis, der aus einer Spule mit der Induktivität L, einem Kondensator mit der Kapazität C und einem ohmschen Widerstand R, alle in Serie geschaltet, besteht, ein Strom der Kreisfrequenz ω_r fließt, welche die Bedingung erfüllt

$$\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} = 0, \quad \text{d. h.,} \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

dann bedeutet das, daß im Serienstromkreis **Resonanz** eintritt, und wir bezeichnen ω_r als die sog. *Resonanzfrequenz*. Der dabei im Serienstromkreis fließende Strom stellt ein Maximum dar und folgt der Beziehung

$$I_r = \frac{U}{R}.$$

Der Widerstand des gesamten Stromkreises ist in diesem Fall gleich dem ohmschen.

In einem **Transformator** bestehen zwischen den Stromstärken, den Spannungen und den Windungszahlen von *Primär-* und *Sekundärwicklung* (I_1, U_1, N_1 bzw. I_2, U_2, N_2) die folgenden Beziehungen:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Für die Periodendauer T einer elektrischen Schwingung in einem **Oszillatorkreis**, der aus dem ohmschen Widerstand R, der Induktivität L und der Kapazität C besteht, gilt die Beziehung

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Wenn der ohmsche Widerstand so klein ist, daß er gegenüber dem kapazitiven bzw. induktiven vernachlässigt werden kann, läßt sich die Periodendauer bzw. Frequenz der Schwingung gemäß der Beziehung

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \quad \text{bzw.} \quad n_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

ausdrücken.

B Beispiele

83. Ein Drahtrahmen vom Flächeninhalt $A = 100\,\text{cm}^2$ rotiert nach Bild 74 in einem homogenen Magnetfeld mit der Induktion $B = 0{,}05\,\text{Wb}\,\text{m}^{-2}$ so, daß er in einer Sekunde $f = 300$ Umdrehungen ausführt. Bestimmen Sie die in dem Drahtrahmen induzierte elektrische Spannung bei den Winkelstellungen $\varphi = 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°$ und $360°$.

Lösung

Der Induktionsfluß, der in einem bestimmten Augenblick durch die Windungsfläche tritt, ist durch die Beziehung

$$\Phi = \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A} = BA\cos\omega t$$

gegeben, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Rahmens bedeutet.

Bild 74

Entsprechend dem Induktionsgesetz können wir aber für die induzierte Spannung auch schreiben

$$U_\text{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = BA\,\omega\sin\omega t.$$

Da $\omega = 2\pi n$ und $\omega t = \varphi$ ist, ergibt sich

$$U_\text{i} = 2\pi\, nBA\sin\varphi,$$

und nach Einsetzen der gegebenen Werte erhalten wir

$$U_\text{i} = 2\pi \cdot 300\,\text{s}^{-1} \cdot 0{,}05\,\text{Vs}\,\text{m}^{-2} \cdot 100 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 \sin\varphi = \underline{0{,}942\,\text{V}\sin\varphi}.$$

Wenn wir für den Winkel φ die jeweils vorgegebene Gradzahl einsetzen, erhalten wir die gesuchten Induktionsspannungen zu

$$\begin{aligned}
U_{i0} &= 0{,}942 \sin 0° &&= 0\ \text{V};\\
U_{i45} &= 0{,}942 \sin 45° &&= 0{,}667\ \text{V};\\
U_{i90} &= 0{,}942 \sin 90° &&= 0{,}942\ \text{V};\\
U_{i135} &= 0{,}942 \sin 135° &&= 0{,}667\ \text{V};\\
U_{i180} &= 0{,}942 \sin 180° &&= 0\ \text{V};\\
U_{i225} &= 0{,}942 \sin 225° &&= -0{,}667\ \text{V};\\
U_{i270} &= 0{,}942 \sin 270° &&= -0{,}942\ \text{V};\\
U_{i315} &= 0{,}942 \sin 315° &&= -0{,}667\ \text{V};\\
U_{i360} &= 0{,}942 \sin 360° &&= 0\ \text{V}.
\end{aligned}$$

84. In einer kurzen Spule der Querschnittsfläche $A = 0{,}5\ \text{m}^2$ und einer Windungszahl $N = 60$ wird durch ein harmonisch veränderliches Magnetfeld der Frequenz $f = 10^6\ \text{s}^{-1}$ eine Induktionsspannung mit dem Höchstwert $U_{i0} = 30\ \text{mV}$ induziert. Wie groß ist der Maximalwert der magnetischen Induktion im Mittelpunkt der Spule?

Lösung

Für die induzierte Wechselspannung, die in einem Feld mit dem Gesamtinduktionsfluß (Höchstwert Φ_{gm}) bei der Kreisfrequenz ω induziert wird, gilt

$$U_i = \Phi_{gm}\omega \sin \omega t = U_{i0} \sin \omega t,$$

wobei

$$U_{i0} = \Phi_{gm}\omega = \Phi_m N\, 2\pi\, f$$

die Amplitude dieser Wechselspannung darstellt. Dabei wird der Höchstwert des gesamten Induktionsflusses mit Hilfe der Windungszahl N und des für eine einzige Windung möglichen Maximalflusses Φ_m ausgedrückt, also

$$\Phi_{gm} = \Phi_m N.$$

Aus der Gleichung für die Amplitude der induzierten Wechselspannung können wir Φ_m berechnen

$$\Phi_m = \frac{U_{i0}}{2\pi f N}.$$

Damit sind wir in der Lage, den gesuchten Maximalwert der magnetischen Induktion zu berechnen. Dieser ist

$$B_m = \frac{\Phi_m}{A} = \frac{U_{i0}}{2\pi f N A} = \frac{30 \cdot 10^{-3}\ \text{V}}{2\pi \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} \cdot 60 \cdot 0{,}5\ \text{m}^2} = \underline{1{,}59 \cdot 10^{-10}\ \text{Wb m}^{-2}}.$$

85. In einem Trafokern entsteht unter der Wirkung eines in der Primärspule fließenden elektrischen Stromes ein Induktionsfluß mit dem Maximalwert $\Phi_m = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$. Wie groß ist der in der Sekundärspule mit $N = 100$ Windungen induzierte Effektivwert der Induktionsspannung, wenn sich der Induktionsfluß mit einer Frequenz von $f = 50\ \text{s}^{-1}$ ändert?

Lösung

Für den Maximalwert der Induktionsspannung, die in N Windungen bei der Frequenz f und einem Maximalwert des Induktionsflusses Φ_m induziert wird, haben wir in Beispiel 84 eine Beziehung abgeleitet:

$$U_{i0} = \Phi_m N\, 2\pi f.$$

Daraus ergibt sich der Effektivwert der induzierten Spannung zu

$$U_{eff} = \frac{U_{i0}}{\sqrt{2}} = \frac{\Phi_m N\, 2\pi f}{\sqrt{2}} \approx 4{,}44 f \Phi_m N = 4{,}44 \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Vs} \cdot 100 = \underline{44{,}4\,\mathrm{V}}.$$

86. Berechnen Sie die von einem Wechselstrom $I = I_0 \sin \omega t$ in einem Leiter mit dem ohmschen Widerstand R während der Dauer einer Periode T verrichtete Arbeit.

Lösung

Für die Leistung eines Gleichstroms gilt

$$P' = UI,$$

wobei U die Spannung und I den Strom bedeutet. Da sich beim Wechselstrom sowohl Stromstärke als auch Spannung periodisch gemäß einer Sinusfunktion ändern, ist der Momentanwert der Leistung durch die Beziehung

$$P' = U_0 \sin \omega t \cdot I_0 \sin \omega t = U_0 I_0 \sin^2 \omega t = R I_0^2 \sin^2 \omega t$$

gegeben, denn die Spannung und der Strom sind bei rein ohmscher Belastung nicht phasenverschoben und außerdem ist $U_0 = R I_0$. Die Durchschnittsleistung P des Wechselstroms ist der mittlere Wert der während einer ganzen Periode veränderlichen Leistung. Deshalb können wir – unter Verwendung der in Bild 75 eingetragenen Symbole – für die Durchschnittsleistung schreiben

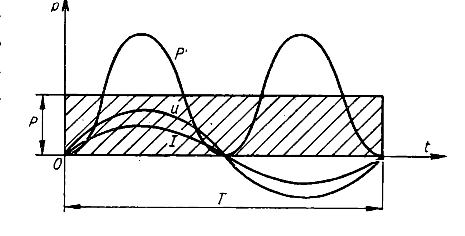


Bild 75

$$TP = \int_0^T R I_0^2 \sin^2 \omega t \, \mathrm{d}t = R I_0^2 \frac{T}{2},$$

$$P = \frac{R I_0^2}{2} = R \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}} \right)^2 = R I_{eff}^2,$$

wobei $I_{eff} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$ den Effektivwert des Stromes darstellt, dessen Maximalwert selbst mit I_0 angegeben ist.

Die während einer ganzen Periode T verrichtete Arbeit erhalten wir in Übereinstimmung mit der Definition für die Arbeit als Produkt von Durchschnittsleistung und Periode, also

$$\underline{W_T = RI_{\mathrm{eff}}^2 T.}$$

87. Ein Klingeltransformator liefert sekundärseitig bei einer Spannung $U_2 = 4$ V einen Strom $I_2 = 200$ mA. Welcher Strom I_1 fließt in der Primärwicklung, wenn diese mit einer Spannung $U_1 = 220$ V gespeist wird und wir eventuelle Trafoverluste vernachlässigen können?

Lösung

Unter der Voraussetzung, daß Verluste vernachlässigt werden können, ist die Arbeit des in der Zeitspanne t in der Primär- und in der Sekundärwicklung fließenden Stroms die gleiche, also

$$U_1 I_1 t = U_2 I_2 t.$$

Das ergibt

$$I_1 = I_2 \frac{U_2}{U_1} = 200 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}\,\frac{4\,\mathrm{V}}{220\,\mathrm{V}} = \frac{0{,}8}{220}\,\mathrm{A} = \underline{0{,}0036\,\mathrm{A}.}$$

88. Welchen Strom nimmt ein Wechselstrommotor auf, der bei einer Spannung $U = 220$ V eine Leistung $P = 2{,}2$ kW liefert, wenn der Leistungsfaktor $\cos\varphi = 0{,}88$ und der Wirkungsgrad des Motors $\eta = 0{,}89$ beträgt?

Lösung

Für die Leistung des Wechselstroms gilt die Beziehung

$$P_i = UI\cos\varphi.$$

Wir können also für den Wirkungsgrad schreiben

$$\eta = \frac{P_o}{P_i},$$

wobei P_i die von der Maschine aufgenommene (input) und P_o die von ihr abgegebene (output) Leistung darstellt.
Für den gesuchten Wert der Stromstärke erhalten wir demnach die Beziehung

$$I = \frac{P_o}{\eta U \cos\varphi} = \frac{2200\,\mathrm{W}}{0{,}89 \cdot 220\,\mathrm{V} \cdot 0{,}88} = \underline{12{,}77\,\mathrm{A}.}$$

89. Ein Kondensator mit der Kapazität C hat zur Zeit $t = 0$ das Potential U_0. Wir entladen ihn über einen Widerstand R. Wie sieht der zeitliche Verlauf des Stromes aus?

Lösung

Für die Behandlung des Stromkreises in Bild 76 verwenden wir das 2. KIRCHHOFFsche Gesetz. Dabei ist die einzige Spannungsquelle unser Kondensator mit der Kapazität C, der die Ladungsmenge Q enthält. Auf Grund des durch den Widerstand fließenden Stromes I tritt am Widerstand R der ohmsche Spannungsabfall auf. Es ist deshalb

$$U_C = IR$$

oder

$$\frac{Q}{C} - IR = 0.$$

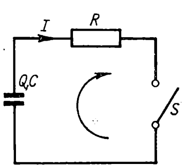
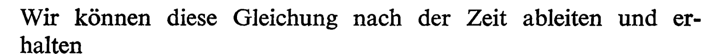


Bild 76



Wir können diese Gleichung nach der Zeit ableiten und erhalten

$$\frac{dQ}{dt}\frac{1}{C} - R\frac{dI}{dt} = 0.$$

Da mit dem Symbol Q die auf den Kondensatorplatten enthaltene Ladung bezeichnet ist, gilt

$$-\frac{dQ}{dt} = I$$

und also

$$\frac{I}{C} + R\frac{dI}{dt} = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$I = K e^{-\frac{t}{RC}},$$

wobei K die Integrationskonstante bedeutet.

Wir bestimmen sie unter Berücksichtigung der Bedingung, daß zu Beginn der Kondensatorentladung, also nach Betätigen des Schalters S (Bild 76), der Kondensator noch das Potential U_0 besaß, so daß für die Zeit $t = 0$ gilt $Q/C = U_0$. Wenn wir das in die ursprüngliche Gleichung einsetzen, erhalten wir

$$U_0 = IR = 0$$

$$U_0 - RK e^{-\frac{t}{RC}} = 0,$$

und für den Fall $t = 0$ erhalten wir

$$U_0 - RK = 0,$$

d. h.,

$$K = \frac{U_0}{R}.$$

Damit ist der zeitliche Verlauf des Stroms im angegebenen Stromkreis durch folgende Beziehung wiedergegeben:

$$I = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

90. Die Platten eines Kondensators der Kapazität $C = 0{,}1\ \mu F$ sind auf eine bestimmte Potentialdifferenz aufgeladen. In welcher Zeit entlädt sich der Kondensator auf die Hälfte seines Anfangswertes, wenn die Platten durch einen hochohmigen Leiter mit dem Widerstand $R = 2 \cdot 10^6\ \Omega$ verbunden werden?

Lösung

Für diesen Stromkreis gilt analog zum vorhergegangenen Beispiel die Beziehung

$$\frac{Q}{C} - IR = 0.$$

Da jedoch $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ ist (Q bedeutet die Ladung auf den Platten des Kondensators, deshalb ist das Vorzeichen negativ), kann man auch schreiben

$$\frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{d. h.,} \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}Q.$$

Das ergibt nach einer Umformung

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{1}{RC}\,\mathrm{d}t.$$

Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir die Beziehung

$$\ln Q = -\frac{1}{RC}t + \ln Q_0.$$

Für die Zeitabhängigkeit der an den Elektroden vorhandenen Ladungen erhalten wir

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

wobei Q_0 die maximale Ladung bedeutet, das ist diejenige Ladungsmenge, die zur Zeit $t = 0$ auf den Elektroden sitzt. Für die in der Aufgabe gesuchte Zeit t^*, in der sich der Kondensator um die Hälfte entlädt, gilt bezüglich der Ladung $Q = Q_0/2$. Wir schreiben deshalb

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-\frac{t^*}{RC}},$$

d. h.,

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{t^*}{RC}}.$$

Also erhalten wir die gesuchte Zeit zu

$$t^* = RC \ln 2 = 0{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} \cdot 2 \cdot 10^6\,\Omega \cdot 2{,}3 \lg 2 = \underline{0{,}14\,\mathrm{s}}.$$

91. Wie verändert sich der Strom I in einem Leiter mit dem Widerstand R und der Induktivität L in der Zeit, wenn wir ihn an eine Quelle mit der konstanten Spannung U anschließen?

Lösung

Für die Berechnung des in Bild 77 dargestellten Stromkreises verwenden wir das 2. KIRCHHOFFsche Gesetz, wobei wir berücksichtigen, daß in der Spule durch die Änderung des Stroms eine Spannung induziert wird, für die gilt

$$U_i = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

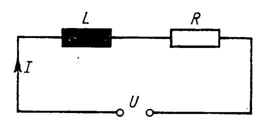


Bild 77

Es wird also

$$U + U_i = RI, \quad U - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI,$$

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI - U = 0.$$

Wenn wir von der letzten Gleichung die Ableitung nach der Zeit bilden, erhalten wir

$$L\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Dieser Typ der Differentialgleichungen hat die allgemeine Lösung

$$I = C_1\,\mathrm{e}^{\alpha_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{\alpha_2 t},$$

wobei C_1 und C_2 Integrationskonstanten und α_1, α_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$L\alpha^2 + R\alpha + 0 = 0$$

sind. Für sie gilt

$$\alpha_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ -\frac{R}{L} \end{matrix} \right. .$$

Damit nimmt die Lösung die Form

$$I = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

an.

Die Integrationskonstanten bestimmen wir aus zwei Grenzbedingungen, und zwar

$$\text{für } t = 0: \quad I = 0 \rightarrow 0 = C_1 + C_2;$$

$$\text{für } t = \infty: \quad I = \frac{U}{R} \rightarrow \frac{U}{R} = C_1 + 0.$$

Aus den angegebenen beiden Gleichungen erhalten wir für C_1 und C_2

$$C_1 = \frac{U}{R}; \quad C_2 = -C_1 = -\frac{U}{R}$$

und damit nach Einsetzen beider Konstanten als endgültige Lösung

$$I = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \underline{\frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}.$$

92. Durch Betätigen des Schalters S (Bild 78) wird der Kondensator über den Widerstand R an die Klemmenspannung U_0 angeschlossen. In welcher Zeit, vom Beginn des Aufladens eines Kondensators der Kapazität C an gerechnet, erreicht die Spannung auf den Kondensatorplatten den Wert U_C?

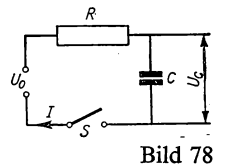


Bild 78

Lösung

Gemäß dem 2. Kirchhoffschen Gesetz können wir für den angegebenen Stromkreis in jedem Augenblick die Beziehung

$$\frac{Q}{C} + U_0 = IR$$

anwenden. Dabei ist Q der Momentanwert der auf den Kondensatorplatten gespeicherten Ladung. Da wir für den Strom $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ schreiben können, erhalten wir nach Umformung die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{CR}Q - \frac{U_0}{R}. \tag{1}$$

Wenn wir die Substitution

$$\frac{Q}{CR} + \frac{U_0}{R} = x$$

einführen, wird

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{CR}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \quad \text{d. h.,} \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = CR\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

so daß wir nach Einsetzen in Gl. (1) erhalten

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{CR}x.$$

Durch Integration dieser Gleichung finden wir

$$x = k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}, \quad \text{d. h.,} \quad \frac{Q}{CR} + \frac{U_0}{R} = k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}.$$

Die Integrationskonstante k bestimmen wir aus der Bedingung, daß zur Zeit $t = 0$ auch die Ladung $Q = 0$ ist, so daß sich ergibt

$$k = \frac{U_0}{R}.$$

Da $Q/C = -U_C$ die am Kondensator anliegende Momentanspannung ist, die gegen die Klemmenspannung U_0 gemessen wird, ergibt sich

$$-U_C + U_0 = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}, \quad \text{d. h.,} \quad \mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}} = \frac{U_0 - U_C}{U_0},$$

so daß für die gesuchte Zeit t, zu der am Kondensator die Spannung U_C besteht, die Beziehung gilt:

$$\underline{t = CR \ln \frac{U_0}{U_0 - U_C}}.$$

93. Ein Stromkreis enthält in Serie geschaltet einen ohmschen Widerstand $R = 10\ \Omega$, einen Kondensator der Kapazität $C = 2\ \mu\text{F}$ und eine Induktionsspule der Induktivität $L = 0{,}1$ H. Er ist an eine Wechselspannung $U = 220$ V mit der Netzfrequenz $f = 50\ \text{s}^{-1}$ angeschlossen. Welcher Strom fließt in dem angegebenen Stromkreis?

Lösung

Der Scheinwiderstand des Stromkreises aus dem ohmschen Widerstand R, der Induktivität L und der Kapazität C wird bei der Kreisfrequenz ω angegeben durch

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Demnach wird entsprechend dem Ohmschen Gesetz bei der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 2\pi\, 50\ \text{s}^{-1} = 314\ \text{s}^{-1}$ der Strom einen Effektivwert annehmen, für den gilt

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} =$$

$$= \frac{220\ \text{V}}{\sqrt{10^2\ \Omega^2 + \left(314\ \text{s}^{-1} \cdot 0{,}1\ \text{H} - \frac{1}{314\ \text{s}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{F}}\right)^2}} = \underline{0{,}14\ \text{A}}.$$

94. Eine Drosselspule und ein Kondensator der Kapazität $C = 10\ \mu\text{F}$, die hintereinandergeschaltet sind, werden von einem Strom $I = 1$ A durchflossen. Sie sind an ein Netz der

Spannung $U = 120$ V und der Frequenz $f = 50\ s^{-1}$ angeschlossen. Der ohmsche Widerstand der Drosselspule hat den Wert $R = 120\ \Omega$. Berechnen Sie die Induktivität der Spule.

Lösung

Aus der Beziehung

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

erhält man die gesuchte Induktivität und kann sie wie folgt ausdrücken:

$$L = \frac{\sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2} + \frac{1}{\omega C}}{\omega} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{120^2\ V^2}{1^2\ A^2} - 120^2\ \Omega^2} + \frac{1}{314\ s^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\ F}}{314\ s^{-1}} = \underline{1{,}013\ H}.$$

95. Ein Kondensator soll einen kapazitiven Widerstand $X = 500\ \Omega$ haben. Wie groß muß demnach seine Kapazität bei einer Frequenz von a) $50\ s^{-1}$ und b) $50000\ s^{-1}$ sein?

Lösung

Den kapazitiven Widerstand können wir mit Hilfe der Kapazität C und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ ausdrücken, d. h.,

$$X = \frac{1}{\omega C}.$$

Die gesuchte Kapazität berechnen wir aus

$$C = \frac{1}{X\omega} = \frac{1}{2\pi f X}.$$

Für die einzelnen vorgenannten Frequenzen ermitteln wir dann die entsprechenden Kapazitäten wie folgt:

$$C_{50} = \frac{1}{2\pi \cdot 50\ s^{-1} \cdot 500\ \Omega} = 6{,}37 \cdot 10^{-6}\ F = \underline{6{,}37\ \mu F};$$

$$C_{50\,000} = \frac{1}{2\pi \cdot 50000\ s^{-1} \cdot 500\ \Omega} = 6{,}37 \cdot 10^{-9}\ F = \underline{0{,}00637\ \mu F}.$$

96. Ein Kondensator der Kapazität $C = 16\,\mu$F und ein ohmscher Widerstand der Größe $R = 200\,\Omega$ sind, in Serie geschaltet, an ein Wechselstromnetz der Spannung $U = 220$ V und der Frequenz $f = 50\,\text{s}^{-1}$ angeschlossen. Es sind für diesen Fall folgende Größen zu bestimmen: die Impedanz des Stromkreises, die Stromstärke, die Phase zwischen Spannung und Strom, die am Kondensator und die am ohmschen Widerstand anliegende Spannung.

Lösung

Wir wenden die für einen Wechselstromkreis der angegebenen Art gültigen Beziehungen an und finden

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{200^2\,\Omega^2 + \left(\frac{1}{2\pi \cdot 50\,\text{s}^{-1} \cdot 16 \cdot 10^{-6}\,\text{F}}\right)^2} = \underline{282{,}1\,\Omega};$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220\,\text{V}}{282\,\Omega} = \underline{0{,}779\,\text{A}};$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{200\,\Omega}{282\,\Omega} = 0{,}707; \quad \underline{\varphi = 44°50'},$$

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{0{,}78\,\text{A}}{2\pi \cdot 50\,\text{s}^{-1}\,16 \cdot 10^{-6}\,\text{F}} = \underline{155{,}15\,\text{V}};$$

$$U_R = IR = 0{,}78\,\text{A} \cdot 200\,\Omega = \underline{155{,}97\,\text{V}.}$$

97. Ein Stromverbraucher mit einer Leistungsaufnahme $P = 3$ kW und einem Leistungsfaktor $\cos\varphi_1 = 0{,}6$ ist an ein elektrisches Netz der Spannung $U = 220$ V und der Frepuenz $f = 50\,\text{s}^{-1}$ angeschlossen.
a) Welchen Kondensator müßten wir in Parallelschaltung an die Klemmen des Stromverbrauchers anschließen, um eine Erhöhung des Leistungsfaktors auf den Wert $\cos\varphi_1 = 0{,}9$ zu erreichen?
b) Wie müßte ein Kondensator beschaffen sein, dessen zusätzlicher Anschluß keine Phasenverschiebung ergibt, so daß $\cos\varphi_2 = 1$ wird?

Lösung

Die ohmsche Komponente des durch den Stromverbraucher fließenden Stroms I_R zeigt bezüglich der Spannung U keine Phasenverschiebung. Wir bezeichnen sie deshalb mit dem Zeiger $\vec{I}_R^*$, der mit der Richtung des Spannungszeigers $\vec{u}^*$ zusammenfällt (Bild 79). Wenn wir als positive Richtung die Richtung der Phasenverschiebung entgegen dem Uhrzeigersinn bezeichnen, dann sind die induktive und die kapazitive Stromkomponente durch die Vektoren $\vec{I}_L^*$ und $\vec{I}_C^*$ zu definieren. Der resultierende Zeiger

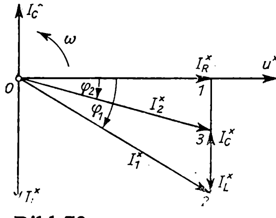


Bild 79

wird vor dem Anschluß des Zusatzkondensators die Größe $\vec{I}_1^*$ und nach dessen Anschluß die Größe $\vec{I}_2^*$ haben.

Zwischen der alten Stellung des resultierenden Stromzeigers $\overrightarrow{12}$ und des neuen $\overrightarrow{13}$ wird nach Bild 168 die Beziehung

$$\overrightarrow{23} = \overrightarrow{12} - \overrightarrow{13}$$

gelten. Für die Größen der Zeiger bedeutet das

$$I_C = I_R \tan \varphi_1 - I_R \tan \varphi_2,$$

$$\frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{P}{U} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2).$$

Daraus ergibt sich

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2).$$

a) Da $\cos \varphi_1 = 0{,}6$ dem in den Tabellen angegebenen Wert $\tan \varphi_1 = 1{,}3333$ entspricht und für $\cos \varphi_2 = 0{,}9$ sich $\tan \varphi_2 = 0{,}4843$ ergibt, erhalten wir die Kapazität des erforderlichen Kondensators zu

$$C = \frac{3000 \text{ W}}{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 220^2 \text{ V}^2} (1{,}3333 - 0{,}4843) = \underline{167{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ F}}.$$

b) Wenn wir die Phasenverschiebung auf den Wert $\cos \varphi_2 = 1$ ausgleichen wollen, setzen wir in die oben abgeleitete Beziehung $\tan \varphi_2 = 0$ ein, so daß sich ergibt

$$C = \frac{P}{\omega U^2} \tan \varphi_1 = \frac{3000 \text{ W}}{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 220^2 \text{ V}^2} 1{,}3333 = \underline{263{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ F}}.$$

98. Welcher Strom fließt durch einen Stromkreis, der aus einer Induktivität $L = 4$ H und aus einer Kapazität $C = 16$ µF besteht, die, in Parallelschaltung angeordnet, an eine Wechselstromquelle der Spannung $U = 220$ V und der Frequenz $f = 50 \text{ s}^{-1}$ angeschlossen sind?

Lösung

Der angegebene Stromkreis ist in Bild 80a dargestellt, sein Zeigerdiagramm in Bild 80b. Der in der Spule fließende Strom ist um 90° gegenüber der Spannung U verzögert, wo-

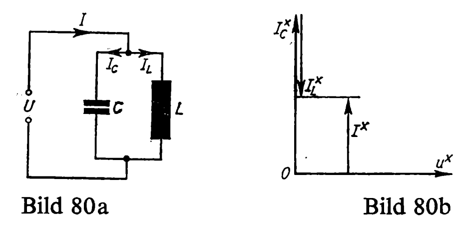


Bild 80a Bild 80b

durch sich ergibt, daß der Kondensatorstrom seinerseits der Klemmenspannung um 90° vorauseilt. Aus dem dargestellten Zeigerdiagramm resultiert die Größe der Zeiger zu

$$\vec{I} = \vec{I}_C - \vec{I}_L.$$

Da jedoch

$$I_C = \frac{U}{\dfrac{1}{\omega C}}, \quad I_L = \frac{U}{\omega L}$$

ist, wird

$$I = U\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 220\ \text{V}\left(2\pi \cdot 50\ \text{s}^{-1} \cdot 16 \cdot 10^{-6}\ \text{F} - \frac{1}{2\pi \cdot 50\ \text{s}^{-1} \cdot 4\ \text{H}}\right) =$$

$$= \underline{0{,}93\ \text{A}}.$$

99. Ein in Bild 81 dargestellter Serienresonanzkreis, bestehend aus einer Spule mit dem ohmschen Widerstand $R = 0{,}2\ \Omega$, der Induktivität $L = 50\ \mu\text{H}$ und einem Kondensator der Kapazität $C = 300\ \text{pF}$, ist an eine Spannung $U = 4\ \text{V}$ angeschlossen. Ermitteln Sie die Resonanzfrequenz, den Resonanzstrom und die bei Resonanz an Induktivität bzw. Kapazität anliegende Spannung.

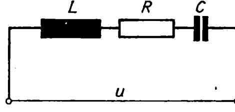


Bild 81

Lösung

Für die Resonanzfrequenz gilt die Beziehung

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{50 \cdot 10^{-6}\ \text{H} \cdot 300 \cdot 10^{-12}\ \text{F}}} = \underline{1{,}299 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1}}.$$

Der im Resonanzfall fließende Strom entspricht dem, der nur bei Vorhandensein eines ohmschen Widerstands aufträte, nämlich

$$I_r = \frac{U}{R} = \frac{4\ \text{V}}{0{,}2\ \Omega} = \underline{20\ \text{A}}.$$

Die an Induktivität und Kapazität anstehende Spannung erhalten wir aus dem OHMschen Gesetz für Wechselstrom zu

$$U_L = I_r \omega_r L = 20\ \text{A} \cdot 2\pi \cdot 1{,}299 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} \cdot 50 \cdot 10^{-6}\ \text{H} = \underline{8{,}165 \cdot 10^3\ \text{V}};$$

$$U_C = I_r \frac{1}{\omega_r C} = 20\ \text{A}\ \frac{1}{2\pi \cdot 1{,}3 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} \cdot 300 \cdot 10^{-12}\ \text{F}} = \underline{8{,}165 \cdot 10^3\ \text{V}}.$$

100. Ein Schwingkreis besteht aus einer Spule der Induktivität $L = 0{,}07\ \text{H}$ und einem Plattenkondensator mit dem Flächeninhalt $A = 0{,}45\ \text{m}^2$, der als Dielektrikum Paraffinpapier der Dicke $d = 0{,}1\ \text{mm}$ ($\varepsilon_r = 2$) enthält. Es ist die Maximalstärke und die Periode des Resonanzstroms zu bestimmen für den Fall, daß der Kondensator anfangs auf die Spannung $U_0 = 100\ \text{V}$ aufgeladen wurde und daß der ohmsche Widerstand des Kreises zu vernachlässigen ist.

Lösung

In Anwendung des 2. KIRCHHOFFschen Gesetzes können wir für diesen Stromkreis schreiben

$$RI = U - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t},$$

eine Beziehung, die in Hinsicht auf die Voraussetzung, daß $R = 0$ ist, vereinfacht werden kann zu

$$0 = U - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \qquad (1)$$

Da aber auch $U = Q/C$ ist, ergibt sich

$$0 = \frac{Q}{C} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

Indem wir die vorstehende Gleichung nach der Zeit differenzieren, können wir sie unter Verwendung des Ausdrucks $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = -I$ in die Form

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 I$$

bringen, wobei wir $^1/LC = \omega^2$ gesetzt haben. Wir lösen die angegebene Differentialgleichung und erhalten

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi), \qquad (2)$$

worin I_0 die Maximalamplitude des im Schwingkreis fließenden Stroms und φ seine Phasenkonstante darstellt. Beide Größen können wir aus den Anfangsbedingungen ermitteln. Da für die Zeit $t = 0$ auch $I = 0$ und $U = U_0$ gilt, ergibt sich aus Gl (2) $\varphi = 0$. Aus Gl. (1) jedoch folgt

$$0 = U_0 - L\omega I_0,$$

d. h.,

$$I_0 = \frac{U_0}{L\omega} = \frac{U_0}{L\sqrt{\frac{1}{LC}}} = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Da die Kapazität eines Plattenkondensators durch die Beziehung

$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d} = \varepsilon\frac{A}{d}$$

angegeben wird, erhalten wir nach Einsetzen der gegebenen Werte

$$I_0 = U_0\sqrt{\frac{\varepsilon A}{Ld}} = 100\sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}45}{0{,}07 \cdot 0{,}0001}}\ \mathrm{A} \approx \underline{0{,}107\ \mathrm{A}}.$$

Für die Periodendauer der ungedämpften Schwingung des Kreises finden wir schließlich

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{\frac{L\varepsilon A}{d}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}07\cdot 2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}45}{0{,}0001}}\,\text{s} \approx$$

$$\approx \underline{4{,}7\cdot 10^{-4}\,\text{s}}.$$

101. Wie groß ist die Phasenspannung eines Drehstromgenerators, dessen Spulen in Sternschaltung stehen, wenn die Leiterspannung 220 V beträgt?

Lösung

Da die Spulen des Generators um jeweils einen Winkel von 120° gegeneinander gedreht sind, müssen auch die in ihnen induzierten Spannungen jeweils um 120° gegeneinander elektrisch verschoben sein. Wenn wir die Phasenspannungen $\vec{u}_f^*$ als umlaufende Zeiger darstellen, dann werden auch sie um 120° gegeneinander verdreht sein. Die Leiterspannung $\vec{u}_s^*$ stellt dann die Differenz zweier Phasenspannungszeiger dar; also ist $\vec{u}_s^*$ der die Spitzen der Zeiger $\vec{u}_f^*$ verbindende Zeiger.

Aus Bild 82 ist zu entnehmen, daß entsprechend dem Teildreieck $00'C$ die Zeiger bestimmt sind zu

$$\frac{U_s}{2} = U_f \cos 30° = U_f \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Damit ist

$$U_f = \frac{U_s}{\sqrt{3}} = \frac{220\,\text{V}}{1{,}73205} = \underline{127\,\text{V}}.$$

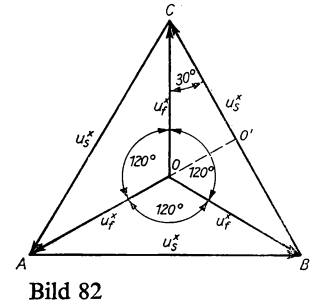


Bild 82

102. In der Speiseleitung eines elektrischen Drehstromofens, der für 3 · 380 V in Dreieckschaltung ausgelegt ist, wird ein Strom $I_s = 6$ A gemessen. Wie groß ist
a) der Phasenstrom,
b) der Widerstand in einer Phase,
c) die Ofenleistung?

Lösung

a) Bekanntlich ist die Beziehung zwischen Phasenstrom und verkettetem Leiterstrom bei der Dreieckschaltung analog der Beziehung zwischen den Spannungen bei der Sternschaltung, also

$$I_f = \frac{I_s}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \underline{3{,}464\,\text{A}}.$$

b) Da im Falle der Dreieckschaltung gilt

$$U_f = U_s,$$

erhalten wir

$$R_f = \frac{U_f}{I_f} = \frac{380\,\text{V}}{3{,}47\,\text{A}} = \underline{109{,}7\,\Omega}.$$

c) Die Leistung berechnen wir aus den angegebenen Werten, die in die Beziehung für die Leistung des Drehstroms eingesetzt werden. Diese erhalten wir als den dreifachen Wert der mit einer einzigen Phase übertragenen Leistung, also

$$P = 3 U_f I_f \cos\varphi.$$

Diese Beziehung wird allgemein in der Weise angewendet, daß alle Werte verkettete Werte darstellen. Für den Fall der Sternschaltung bedeutet das

$$P = 3\frac{U_s}{\sqrt{3}} I_s \cos\varphi = \sqrt{3}\; U_s I_s \cos\varphi\,.$$

Das gleiche gilt im Falle der Dreieckschaltung, also

$$P = 3 U_s \frac{I_s}{\sqrt{3}} \cos\varphi = \sqrt{3}\; U_s I_s \cos\varphi\,.$$

In unserem Falle ergibt das

$$P = \sqrt{3} \cdot 380\,\text{V} \cdot 6\,\text{A} \cdot 1 = 3949\,\text{W} = \underline{3{,}949\,\text{kW}}.$$

103. Mit welchem Leistungsfaktor arbeitet ein Drehstrommotor, der bei einer Leiterspannung von $U = 6000\,\text{V}$ und einer Leistungsaufnahme $P_i = 200\,\text{kW}$ den Strom $I = 23{,}4\,\text{A}$ aufnimmt? Welche Spannung entfiele auf eine einzige Phase, wenn die Motorwicklung in Sternschaltung ausgeführt würde?

Lösung

Den Leistungsfaktor bestimmen wir aus der Beziehung für die Drehstromleistung des Motors zu

$$P = \sqrt{3}\; U_s I_s \cos\varphi$$

(U_S, I_S verkettete Werte der Spannung und des Stromes, $\cos\varphi$ Leistungsfaktor des Motors). Daraus folgt

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{3}\; U_s I_s} = \frac{200 \cdot 1000\,\text{W}}{1{,}73205 \cdot 6000\,\text{V} \cdot 23{,}4\,\text{A}} = \underline{0{,}8224}.$$

Für die Beziehung zwischen Phasen- und Leiterspannung gilt bei der Sternschaltung

$$U_f = \frac{U_s}{\sqrt{3}} = \frac{6000\,\text{V}}{1{,}73205} = \underline{3464\,\text{V}}.$$

A Aufgaben

120. In einem Magnetfeld der Induktion $B = 50 \cdot 10^{-4}$ Wb m^{-2} rotiert mit einer Frequenz $n = 3000$ min^{-1} ein Leiter, der aus $N = 400$ Windungen besteht und die Gestalt eines Rechtecks hat, dessen Abmessungen $a = 0{,}15$ m und $b = 0{,}2$ m sind. Wie groß ist der Maximalwert der im Leiter induzierten Spannung?
121. Eine rechteckige Spule mit den Abmessungen 2,0 cm · 2,5 cm besteht aus 100 Windungen und rotiert gleichmäßig in einem homogenen Magnetfeld der Induktion $B = 0{,}1$ T um die zur Feldrichtung senkrecht orientierte Achse

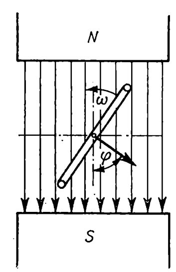


Bild 83

(Bild 83). In ihr wird dabei eine Spannung mit der Maximalamplitude $U_0 = 1{,}57$ V induziert. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Spule?
122. Eine elektrische Maschine gibt bei 220 V einen Strom von 109 A ab und hat laut Wattmeteranzeige eine Leistungsaufnahme $P_i = 20$ kW. Wie groß ist ihr Leistungsfaktor?
123. Wie groß ist die Effektivspannung eines Wechselstroms, dessen Maximalspannung den Wert $U_0 = 170$ V aufweist?
124. Ein Wechselstromverbraucher nimmt laut Meßanzeige einen Strom $I = 2$ A auf, wenn die Klemmenspannung den Wert $U = 110$ V hat. Der Strom ist gegenüber der Spannung um den Winkel φ aus $\cos\varphi = 0{,}8$ verschoben. Es ist die Leistung des Wechselstroms zu berechnen.
125. Berechnen Sie, welchen Strom ein Einphasenelektromotor der Leistung $P = 1{,}47$ kW aus einem Wechselstromnetz mit der Spannung $U = 220$ V entnimmt, wenn der Leistungsfaktor $\cos\varphi = 0{,}8$ und der Wirkungsgrad $\eta = 90\%$ beträgt.
126. Ein Motor für Dreiphasenstrom ist an eine Netzspannung $U_S = 380$ V angeschlossen. a) Wie groß ist die Spannung zwischen dem Leiter und dem Nullpunkt der Motorwicklung? b) Wie groß ist der Strom in der Spule des Motors, wenn er in der Zuleitung den Wert $I_S = 6$ A hat?
127. Welche Leistung hat ein Drehstrommotor mit den Angaben $U = 380$ V, $I = 30$ A, $\cos\varphi = 0{,}8$ und $\eta = 0{,}85$?
128. Ein Drehstromgenerator gibt bei einer Spannung $U = 6300$ V einen Strom $I = 200$ A bei $\cos\varphi = 0{,}8$ ab. Wie groß ist seine Leistung?
129. Ein Drehstrommotor, dessen Spulen in Dreieckschaltung angeordnet sind, ist an ein Netz der Spannung $U_S = 220$ V angeschlossen. Die Netzfrequenz beträgt $f = 50$ s^{-1}. Er gibt bei einem Leistungsfaktor $\cos\varphi = 0{,}75$ und einem Wirkungsgrad $\eta = 90\%$ eine Leistung von $P = 27{,}1$ kW ab. Welcher Strom I_s' fließt in den Speiseleitern (verketteter Strom)?
130. Ein Kondensator ist nach Bild 84 geschaltet. Die Kenngrößen sind $U = 220$ V, $R = 10\,\Omega$, $C = 1\,\mu$F, $L = 2$H und $\omega = 2\pi \cdot 50$ s^{-1}. Es ist die an den Klemmen des Kondensators auftretende Effektivspannung zu berechnen.

131. Ein Serienstromkreis, bestehend aus einem Kondensator der Kapazität $C = 8\ \mu F$, einer Spule der Induktivität $L = 2$ H und einem ohmschen Widerstand $R = 30\ \Omega$, ist an eine Quelle der

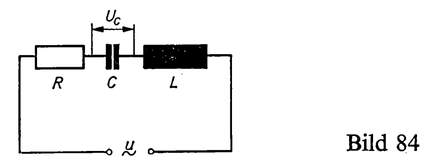


Bild 84

Spannung $U = 110$ V und der Frequenz $f = 50\ s^{-1}$ angeschlossen. Es sind zu bestimmen: die Impedanz des gesamten Stromkreises, der im Kreis fließende Strom, die am Kondensator und an der Spule anliegende Spannung sowie der Leistungsfaktor des Stromkreises.

132. Eine Spule der Induktivität $L = 0{,}5$ H ist mit einem ohmschen Widerstand $R = 157\ \Omega$ zusammen in Serie geschaltet und an ein Netz der Spannung $U = 220$ V und der Frequenz $f = 50\,s^{-1}$ angeschlossen. Es sind zu bestimmen: die Impedanz dieser Kombination, die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom, die Stromstärke sowie die an Spule und Widerstand anliegende Spannung.

133. Ein ohmscher Widerstand $R = 3\ \Omega$ und ein Kondensator der Kapazität C, dessen kapazitiver Widerstand bei einer Frequenz von $f = 50\,s^{-1}$ den Wert $R_C = 1/\omega C = 5\ \Omega$ hat, sind parallelgeschaltet und an eine Wechselspannungsquelle $U = 10$ V und $f = 50\ s^{-1}$ angeschlossen (Bild 85a). Es sind zu

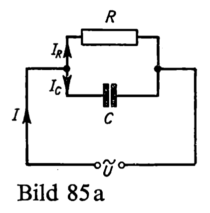


Bild 85a

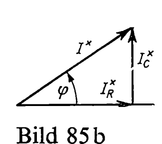


Bild 85b

bestimmen: der Scheinwiderstand des gesamten Stromkreises, der im Kreis fließende Strom, der im Widerstand und der im Kondensator fließende Strom sowie die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom.

134. Welcher Strom fließt in dem in Bild 86 dargestellten Stromkreis, wenn $L = 9$ H,

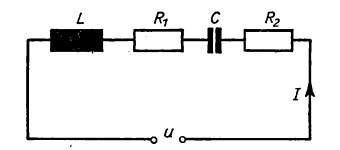


Bild 86

$R_1 = 200\ \Omega$, $C = 1\ \mu F$, $R_2 = 58\ \Omega$, $U = 220$ V und $f = 50\ s^{-1}$ ist?

135. Durch eine Spule der Induktivität $L = 0{,}25$ H fließt ein Strom $I = I_0 \sin \omega t$ mit $I_0 = 1$ A und $\omega = 3140\,s^{-1}$. Bestimmen Sie den Maximalwert der in der Spule induzierten Spannung.

136. Wie groß muß der Maximalwert des Induktionsflusses im Kern eines Transformators bei der Frequenz $f = 50\ s^{-1}$ sein, damit in einer Windung der Sekundärwicklung eine Spannung mit dem Effektivwert $U_{eff} = 0{,}25$ V induziert wird?

137. Die Primärwicklung eines Transformators hat $N_1 = 880$ Windungen, die Sekundärwicklung $N_2 = 1200$ Windungen. Welche Spannung wird in der Sekundärwicklung induziert, wenn die Primärwicklung an eine Spannung vom Betrag $U_1 = 220$ V angeschlossen wird?

138. Eine Batterie von in Serie geschalteten Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1 und C_2 (Bild 87) enthält zur Zeit $t = 0$ die Spannung U_0. Welche Funktion

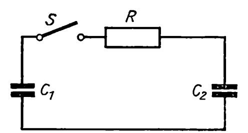


Bild 87

nimmt der zeitliche Stromverlauf nach Schließen des Schalters S an?

139. Ein Kondensator der Kapazität $C = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ F ist auf die Spannung $U = 500$ V aufgeladen. Er ist Teil eines Stromkreises der Induktivität $L = 5 \cdot 10^{-5}$ H. Wie groß wird der Maximalwert des ungedämpften Schwingkreisstroms, und in welcher Zeit wächst er vom Nullwert bis zum Maximum an?

140. Eine Spule der Induktivität $L = 1$ H soll zusammen mit einem ohmschen Widerstand $R = 1\ \Omega$ zur Zeit $t = 0$ an eine konstante Spannung U angeschlossen sein. Es ist die Zeitspanne zu bestimmen, nach deren Ablauf der durch den Stromkreis fließende Strom seinen konstanten Endwert erreicht hat, wobei die Genauigkeit $1\,^0/_{00}$ betragen soll.

2. Optik

2.1. Photometrie

Eine Lichtquelle sendet Lichtstrahlung einer bestimmten Energie nach allen Seiten aus. Unter **Strahlungsfluß** Φ_e verstehen wir gewöhnlich diejenige Lichtenergie (allgemein: Strahlungsenergie), die in der Zeiteinheit durch irgendeine Fläche strömt. Mit **Lichtstrom** Φ bezeichnen wir den Strahlungsfluß, der von einem normalen menschlichen Auge wahrgenommen wird. Das **photometrische Strahlungsäquivalent** K stellt das Verhältnis des Lichtstroms Φ zum zugehörigen Strahlungsfluß Φ_e durch dieselbe Fläche dar.

Der Lichtstrom, den eine Strahlungsquelle in den gesamten umgebenden Raum aussendet, wird als die **Gesamtlichtstärke** einer Lichtquelle bezeichnet.

Wenn eine punktförmige Lichtquelle in den Raumwinkel $\mathrm{d}\omega$ einen Lichtstrom $\mathrm{d}\Phi$ aussendet, dann heißt der Quotient

$$I = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\omega}$$

Richtlichtstärke einer Quelle in der betreffenden Richtung. Die Gesamtlichtstärke einer Lichtquelle ist

$$\Phi = \int_0^{4\pi} I \,\mathrm{d}\omega .$$

Wenn ihre Richtstärke in alle Richtungen gleich groß ist, wird

$$\Phi = 4\pi I.$$

Unter der **Beleuchtungsstärke** E einer Fläche A verstehen wir den Quotienten aus dem Lichtstrom $\mathrm{d}\Phi$ und dem Flächenelement $\mathrm{d}A$, auf das er trifft, also

$$E = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A}.$$

Wenn auf eine Fläche $\mathrm{d}A$ Lichtstrahlen einer im Abstand s entfernt stehenden Punktquelle der Lichtstärke I auftreffen und wenn die Lichtstrahlen gegenüber der Flächennormalen mit dem Winkel φ einfallen, dann wird die Beleuchtungsstärke der Fläche durch folgende Beziehung bestimmt:

$$E = \frac{I \cos \varphi}{s^2}.$$

B Beispiele

104. In einem Projektionsapparat wird eine Glühlampe mit einem Gesamtlichtstrom der Größe $\Phi_0 = 4800\,\mathrm{lm}$ verwendet. Bei der Projektion ist die Bildfläche in Gestalt eines Rechtecks mit den Seiten $a = 2\,\mathrm{m}$ und $b = 1{,}5\,\mathrm{m}$ gleichmäßig mit einer Beleuchtungsstärke $E = 4\,\mathrm{lx}$ ausgeleuchtet. Welcher Anteil des von der Glühlampe ausgesandten Lichtstroms trifft auf die Projektionsfläche?

Lösung

An einer Stelle einer beleuchteten Fläche, an der die Beleuchtungsstärke den Wert E lx annimmt, fällt auf das Flächenelement $\mathrm{d}A$ der Lichtstrom

$$\mathrm{d}\Phi = E\,\mathrm{d}A$$

und damit auf die Fläche A der Lichtstrom

$$\Phi = \int_A E\,\mathrm{d}A.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Beleuchtungsstärke auf der gesamten Bildfläche überall gleich groß ist, gilt für die Beleuchtungsstärke $E = \text{const}$, und es wird

$$\Phi = EA,$$

wobei A der Flächeninhalt der Bildfläche ist.
Vom gesamten von der Glühlampe ausgesandten Lichtstrom Φ_0 entfällt auf die Bildfläche der Anteil

$$u = \frac{\Phi}{\Phi_0}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte erhalten wir als Ergebnis

$$u = \frac{4\,\text{lx} \cdot 2\,\text{m} \cdot 1{,}5\,\text{m}}{4800\,\text{lm}} = 0{,}0025, \quad \text{d. h.,} \quad \underline{0{,}25\,\%}.$$

105. Eine Wand wird durch zwei gleichartige Kerzen beleuchtet, die im Abstand $d = 1$ m von der Wand dicht nebeneinander aufgestellt sind. Berechnen Sie, um welche Strecke wir die eine Kerze an die Wand heranrücken müssen, wenn nach Erlöschen der anderen die Wand ebenso wie vordem beleuchtet sein soll.

Lösung

Für die Beleuchtungsstärke einer Fläche bei Beleuchtung durch eine Punktquelle gilt die Beziehung

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \varphi .$$

Da beide Kerzen von der Wand den gleichen Abstand d und gleiche Lichtstärken $I_1 = I_2$ haben und die Lichtstrahlen von beiden senkrecht auf die Wand auftreffen, ist die Gesamtbeleuchtungsstärke der Fläche wegen der gleichzeitigen Beleuchtung mit beiden Kerzen durch die Beziehung

$$E_0 = \frac{2I}{d^2}$$

gegeben. Nach dem Auslöschen der einen Kerze müssen wir die zweite bis auf einen solchen Abstand x an die Wand heranrücken, daß die Beleuchtungsstärke der Wand ebenso groß ist wie vorher, damit also die Beziehung

$$\frac{2I}{d^2} = \frac{I}{x^2}$$

erfüllt wird. Daraus finden wir

$$x = \frac{d\sqrt{2}}{2} .$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir

$$\underline{x = 0{,}7\,\text{m}}.$$

Die Kerze muß demnach <u>30 cm</u> an die Wand herangerückt werden.

106. In der Mitte über einer kreisrunden Tischplatte vom Radius $r = 1$ m hängt eine (punktförmige) Lichtquelle. Berechnen Sie, in welcher Höhe über der Tischplatte sie hängen muß, damit die Beleuchtungsstärke am Tischrand einen maximalen Wert annimmt.

Lösung

Wenn sich wie in Bild 88 die Lichtquelle in einem Abstand l von dem Rand der Tischplatte befindet und der Einfallswinkel des Lichtes mit φ angegeben ist, so ist in jedem Punkt des kreisrunden Tischrandes die Beleuchtungsstärke durch die Beziehung

$$E = \frac{I \cos \varphi}{l^2}$$

gegeben. Ist die Lichtquelle in einer Höhe $h = x$ über dem Mittelpunkt der Tischplatte angeordnet, dann gilt

$$\cos \varphi = \frac{x}{l} \quad \text{und} \quad l = \sqrt{x^2 + r^2},$$

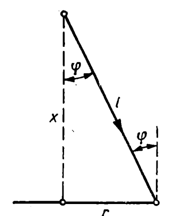


Bild 88

so daß sich ergibt

$$E = \frac{Ix}{\left(\sqrt{x^2 + r^2}\right)^3}.$$

Wenn die Beleuchtungsstärke einen Maximalwert annehmen soll, so muß die Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 0$$

erfüllt sein. Das führt zu folgender Gleichung:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + r^2}\right)^3} - \frac{3x^2}{\left(\sqrt{x^2 + r^2}\right)^5} = 0.$$

Nach Umformung und Auflösung dieser Gleichung erhalten wir

$$\underline{x = \pm \frac{r\sqrt{2}}{2}}.$$

Die Lampe muß also in einer Höhe von <u>70 cm</u> über der Mitte des Tisches aufgehängt werden.

107. Ein Tisch wird durch zwei Glühlampen beleuchtet, die in einer Höhe $h = 2$ m über der Tischfläche und in einem gegenseitigen Abstand $d = 1$ m voneinander aufgehängt sind. Berechnen Sie die Beleuchtungsstärken
a) in den senkrecht unter den Lampen gelegenen Punkten und
b) in der Mitte zwischen diesen beiden Punkten
unter der Voraussetzung, daß jede der beiden Glühlampen die Lichtstärke $I_0 = 200$ cd hat.

Lösung

In jedem beliebigen Punkt der Tischplatte wird die Beleuchtungsstärke E gleich der Summe der von den beiden Lichtquellen herrührenden Beleuchtungsstärken sein, also

$$E = E_1 + E_2. \tag{1}$$

Im Fall a) gilt entsprechend den in Bild 89 angewendeten Bezeichnungen

$$E_1 = \frac{I_0}{h^2}, \quad E_2 = \frac{I_0 \cos \varphi_1}{r_1^2}.$$

Da

$$\cos \varphi_1 = \frac{h}{r_1} \quad \text{und} \quad r_1 = \sqrt{d^2 + h^2}$$

ist, geht Gl. (1) in die folgende Form über:

$$E = \frac{I_0}{h^2} + \frac{I_0 h}{\left(\sqrt{d^2 + h^2}\right)^3}.$$

Bild 89

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir

$$\underline{E = 86 \text{ lx}}.$$

Im Fall b) bildet der Punkt B, der mitten zwischen den beiden Fußpunkten A und C liegt, die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Seiten r_2, r_2 und d sind. In diesem Dreieck gilt

$$\cos \varphi_2 = \frac{h}{r_2} \quad \text{und} \quad r_2 = \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}}.$$

Für die von den einzelnen Lichtquellen herrührende Beleuchtungsstärke folgt daraus

$$E_1 = E_2 = \frac{I_0 h}{\sqrt{\left(h^2 + \frac{d^2}{4}\right)^3}}.$$

Nach Einsetzen dieses Ausdrucks für die Teilbeleuchtungsstärke in Gl. (1) erhalten wir für die Gesamtbeleuchtungsstärke im Punkt B

$$E = 2E_1 = 2\frac{I_0 h}{\sqrt{\left(h^2 + \frac{d^2}{4}\right)^3}}.$$

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich

$$\underline{E = 91{,}2 \text{ lx}}.$$

A Aufgaben

141. Berechnen Sie die Beleuchtungsstärke einer Fläche in einem Punkt, auf den aus einer Lichtquelle der Lichtstärke $I = 50$ cd, die im Abstand $r = 4$ m von diesem Punkt angebracht wurde, Lichtstrahlen unter einem Winkel $\varphi = 25°$ einfallen.
142. Über dem Mittelpunkt einer quadratischen Tischplatte hängt in der Höhe $h = 1$ m eine Lampe der Lichtstärke $I = 30$ cd. Berechnen Sie die Beleuchtungsstärke auf der Tischplatte
a) im Mittelpunkt,
b) in den einzelnen Ecken, wenn die Seitenlänge des quadratischen Tisches 2 m beträgt.
143. Berechnen Sie, welcher Lichtstrom aus einer Quelle der Lichtstärke $I = 200$ cd auf eine Fläche der Größe $A = 10\ \text{cm}^2$ einfällt, die senkrecht zum Lichteinfall im Abstand $d = 2$ m von der Lichtquelle angeordnet ist.
144. Über einer hohlen Halbkugelfläche mit dem Radius $R = 1$ m befindet sich in einer Höhe, die gleich dem Kugeldurchmesser ist, eine punktförmige Lichtquelle (Bild 90). Sie hat nach allen Seiten die gleiche Lichtstärke und sendet einen Gesamtlichtstrom von 600 lm aus. Berechnen Sie die Beleuchtungsstärke an einem Punkt im Innern der Halbkugelfläche, auf den das Licht unter dem Winkel $\varphi = 30°$ einfällt.
145. Eine punktförmige Lichtquelle L beleuchtet eine waagerechte Ebene (Bild 91). Ermitteln Sie, wie sich die Beleuchtungsstärke in einem Punkt A, in den der Lichtstrahl senkrecht einfällt, ändert, wenn wir seitlich zur Lichtquelle einen Planspiegel S so aufstellen, daß dieser gleich weit von L wie L von A entfernt ist. Der Spiegel, von dem wir voraussetzen, daß er das Licht verlustlos reflektiert, ist so eingestellt, daß er den von L kommenden Lichtstrahl nach A weiterleitet.

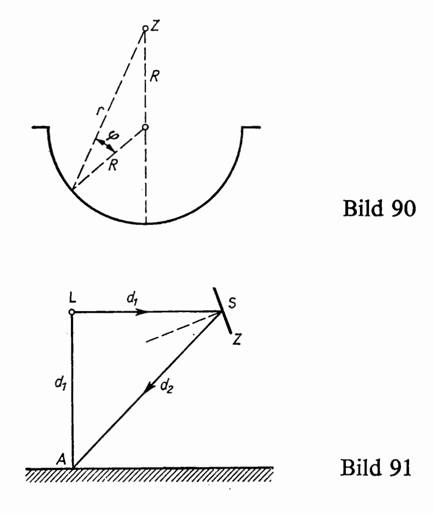


Bild 90

Bild 91

2.2. Geometrische Optik

Reflexionsgesetz

Ein Lichtstrahl, der auf die Grenzfläche zweier Medien auftrifft, wird so reflektiert, daß er in der Einfallsebene verbleibt. Dabei schließt er mit dem Einfallslot einen Winkel α' ein, der gleich dem Winkel α ist, den der einfallende Strahl mit dem Ein-

fallslot bildet. Die Einfallsebene wird durch den einfallenden Strahl und das Einfallslot bestimmt.

Brechungsgesetz
Wenn ein Lichtstrahl in ein anderes Medium eintritt, verläuft er, vorausgesetzt, daß das andere Medium isotrop ist, weiter in der Einfallsebene, wird aber aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt. Wenn der Einfallswinkel mit α_1 und der Brechungswinkel mit α_2 angegeben wird, dann ist der Quotient

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n_{12}$$

unabhängig vom Einfallswinkel. Er wird **relative Brechzahl** n_{12} genannt. Unter der **absoluten Brechzahl** n eines Stoffes verstehen wir den Quotienten

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} = n,$$

wobei α_0 den Einfallswinkel im Vakuum und α den Brechungswinkel des Lichtstrahls im gegebenen Medium darstellt.
Den Zusammenhang zwischen der relativen Brechzahl zweier Medien und ihren absoluten Brechzahlen liefert die Beziehung

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

(n_2 Brechzahl des zweiten, optisch dünneren und n_1 die des ersten, optisch dichteren Mediums).
Von den beiden Medien wird dasjenige als das optisch dichtere angesehen, dessen absolute Brechzahl die größere ist.
Beim Übertritt eines Lichtstrahls aus einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium ist der Brechungswinkel größer als der Einfallswinkel.
Als *Grenzwinkel* bezeichnen wir den Einfallswinkel ε, dessen zugehöriger Brechungswinkel den Wert 90° hat. Für den Grenzwinkel gilt die Bedingung

$$\sin \varepsilon = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Wenn der Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel ist, dann findet kein Übertritt in das andere Medium statt, und es kommt zur **Totalreflexion.**
Wenn ein Lichtstrahl durch ein **Prisma** verläuft, verläßt er dieses nach zweimaliger Brechung aus der ursprünglichen Richtung, um den Winkel δ (den sog. **Ablenkwinkel)**

abgelenkt. Dieser Winkel ist dann ein Minimum, wenn der gebrochene Strahl im Innern des Prismas einen Weg beschreibt, der senkrecht zur Winkelhalbierenden des brechenden Winkels orientiert ist. Den Zusammenhang zwischen der minimalen Ablenkung δ und dem brechenden Winkel γ des Prismas und der Brechzahl des Materials, aus dem das Prisma besteht, liefert die Gleichung

$$n = \frac{\sin\frac{\gamma + \delta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Die Brechzahl eines Stoffes ist für Licht unterschiedlicher Farbe, d.h. für Licht unterschiedlicher Wellenlänge, verschieden groß.

Kugelspiegel und **brechende Kugelflächen** sind Bauelemente zur optischen Abbildung, mit denen durch Reflexion bzw. Brechung von Lichtstrahlen, die in einem engen Bündel nahe der optischen Achse verlaufen, jedem Punkt einer Lichtquelle ein bestimmter Bildpunkt, einer Geraden eine Gerade und einer Ebene eine Ebene zugeordnet werden kann. Unter der optischen Achse eines Spiegels oder einer brechenden Kugelfläche verstehen wir eine Gerade, die durch den Krümmungsmittelpunkt des Spiegels oder der brechenden Kugelfläche und den jeweiligen Scheitelpunkt verläuft. Das Bild, das einem auf der optischen Achse im Unendlichen liegenden Punkt zugeordnet ist, heißt **Bildbrennpunkt** F'; ein Punkt auf der optischen Achse, dessen zugeordneter Bildpunkt im Unendlichen liegt, wird **Gegenstandsbrennpunkt** F genannt.

Die Abbildungsgleichung hat für einen Kugelspiegel die Form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

(a bzw. b Abstand des Gegenstands bzw. Bildes vom Scheitelpunkt des Spiegels, f Abstand des Brennpunkts vom Scheitelpunkt des Spiegels). Für letzteren Abstand gilt

$$f = \frac{r}{2}.$$

Den Krümmungsradius der Kugelfläche eines Konkavspiegels kennzeichnen wir durch ein positives, den eines Konvexspiegels durch ein negatives Vorzeichen.

Für eine Abbildung mit Hilfe einer brechenden Kugelfläche vom Radius r, durch die ein Medium mit der Brechzahl n_1 von einem anderen mit der Brechzahl n_2 abgegrenzt

wird, gilt die Beziehung

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r},$$

und für den Abstand ihres Bildbrennpunktes F' bzw. Gegenstandsbrennpunktes F vom Scheitelpunkt gelten die Gleichungen

$$f' = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}, \quad f = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1}.$$

Der **Abbildungsmaßstab** eines Kugelspiegels bzw. einer brechenden Kugelfläche, der als Quotient der Bildgröße y' und der Gegenstandsgröße y definiert wird, ergibt sich aus den Beziehungen

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'},$$

wobei x bzw. x' die Abstände des Gegenstandes bzw. des Bildes vom Gegenstands- bzw. Bildbrennpunkt bedeuten. Für sie gilt

$$x = a - f, \quad x' = b - f'.$$

Bei Kugelspiegeln fallen Gegenstands- und Bildbrennpunkt zusammen, also wird

$$f = f'.$$

Für die Festlegung des Vorzeichens von Abstandsangaben halten wir uns an die folgenden Regeln:

a) Den Abstand des Gegenstands vom Scheitelpunkt eines Spiegels oder einer brechenden Kugelfläche berechnen wir positiv im Sinne der auf die Kugelfläche auftreffenden Lichtstrahlen.

b) Den Abstand eines Bildes vom Scheitelpunkt eines Spiegels oder einer brechenden Kugelfläche berechnen wir positiv im Sinne der Lichtausbreitung des von der Kugelfläche ausgehenden reflektierten oder gebrochenen Lichtstrahls.

c) Den Radius der reflektierenden oder brechenden Kugelfläche versehen wir mit einem Vorzeichen so, als ob der Mittelpunkt der Kugelfläche das Bild darstelle.

Als **Linse** bezeichnen wir einen lichtdurchlässigen optischen Körper, der von zwei Kugelflächen oder einer Kugelfläche und einer ebenen Fläche begrenzt wird.

Eine Linse bezeichnen wir dann als **dünne Linse**, wenn ihre Dicke d vernachlässigbar klein gegenüber ihrem Durchmesser ist.

Die Abbildungsgleichung für eine dünne, allseitig von demselben Medium umgebene Linse hat die Form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

wobei n die relative Brechzahl des Linsenmaterials in bezug auf ihre Umgebung ist, r_1 und r_2 sind die Radien der Kugelflächen, durch welche die Linse begrenzt wird. Den Abstand des Gegenstandes a bzw. den des Bildes b (Gegenstandsweite, Bildweite) messen wir vom Linsenmittelpunkt aus.
Gegenstands- und Bildbrennweite einer derartigen Linse sind gleich und werden durch die Beziehung

$$D = \frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

ausgedrückt. Die Größe D wird als **Brechkraft** der Linse bezeichnet.
Der Abbildungsmaßstab, die Vergrößerung einer dünnen Linse wird mit Hilfe folgender Beziehungen berechnet:

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} = -\frac{x'}{f} = -\frac{f}{x}.$$

Die Abbildungsgleichung einer Linse nimmt in den Brennpunktkoordinaten die Gestalt

$$xx' = f^2$$

an, wobei

$$x = a - f, \quad x' = b - f$$

ist.

Eine Linse nennen wir dann **dicke Linse**, wenn ihre Dicke d nicht vernachlässigbar klein ist. Die mit einer solchen Linse erzielbare Abbildung ist völlig durch die Lage der **Hauptebenen** und durch die Brennweite bestimmt. Die Abstände der Hauptebene des Gegenstands vom vorderen Scheitelpunkt der Linse V bzw. der der Hauptebene des Bildes vom hinteren Scheitelpunkt der Linse V' sind durch folgende Beziehungen gegeben:

$$h = -\frac{n-1}{n}\frac{d}{r_2}f, \quad h' = -\frac{n-1}{n}\frac{d}{r_1}f.$$

Die Abstände des Gegenstandsbrennpunktes von der Gegenstandshauptebene sowie die des Bildbrennpunktes von der Bildhauptebene sind gleich groß und werden nach

folgender Beziehung berechnet:

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - \frac{(n-1)^2}{n}\,\frac{d}{r_1 r_2}.$$

Ein **zentriertes Linsensystem** setzt sich aus zwei oder mehr Linsen zusammen, die eine gemeinsame optische Achse haben. Die Brechkraft eines aus zwei dünnen Linsen bestehenden zentrierten Systems, dessen beide Linsen in einem Abstand v voneinander angeordnet sind, ist durch die Beziehung

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{v}{f_1 f_2}$$

gegeben, in der f_1 und f_2 die Brennweiten der beiden das System bildenden Linsen darstellen.

Unter der **Winkelvergrößerung** eines optischen Systems oder Gerätes verstehen wir den Quotienten

$$Z = \frac{u'}{u},$$

wobei u' den Blickwinkel angibt, unter dem der Gegenstand bei Verwendung des Gerätes gesehen wird, während u den Blickwinkel angibt, unter dem das unbewaffnete Auge denselben Gegenstand wahrnimmt, wenn dieser in einer dem Auge optimal angemessenen Entfernung, der sog. *deutlichen Sehweite*, angebracht ist.

1. Die Winkelvergrößerung einer Lupe ist durch die Beziehung

$$Z = \frac{u'}{u} = \frac{l}{f}$$

gegeben, wenn der Gegenstand im Unendlichen abgebildet wird, oder durch

$$Z = \frac{l}{f} + 1,$$

wenn das Bild dem Auge in der deutlichen Sehweite l erscheint.

2. Ein **Mikroskop** stellt ein zentriertes optisches System dar, das aus einem Objektiv und einem Okular zusammengesetzt ist. Das Objektiv erzeugt das Bild eines Gegenstands y', gewöhnlich in der Brennebene des Okulars, und das vom Okular entworfene, im Unendlichen gelegene Bild wird dann durch ein nichtangepaßtes Auge wahrgenommen.

Die mit dem Mikroskop erreichbare Vergrößerung ist

$$Z = Z_1 Z_2,$$

wobei $Z_1 = \Delta/f_1$ die Linearvergrößerung des Objektivs und $Z_2 = l/f_2$ die Vergrößerung des Okulars – beide als Einzellinsen betrachtet – darstellt. Δ ist dabei die sog. **optische Tubuslänge** des Mikroskops, welche die Entfernung zwischen der hinteren Brennebene des Objektivs und der vorderen Brennebene des Okulars angibt.
Das **Auflösungsvermögen** eines Mikroskops d beurteilen wir auf Grund des geringsten Abstands zweier Punkte, die bei der Mikroskopbeobachtung gerade noch getrennt wahrgenommen werden können. Wenn im Licht einer Wellenlänge λ beobachtet wird, ergibt sich die Beziehung

$$d = \frac{\lambda}{2n \sin u},$$

wobei n die Brechzahl desjenigen Stoffes bedeutet, in dem das Objekt eingebettet ist, und u der Winkel zwischen der optischen Achse und einem Grenzstrahl ist, der vom beobachteten Objekt aus in die dem Objekt zugekehrte Objektivlinse eintritt.
Der Ausdruck

$$A = n \sin u$$

wird als die **numerische Apertur** bezeichnet.
3. Ein astronomisches **Fernrohr** (KEPLERsches Fernrohr) ist ein zentriertes System aus Objektiv und Okular, dessen optische Tubuslänge gleich Null ist. Objektiv und Okular sind Sammellinsen. Die Vergrößerung eines derartigen Fernrohres ist

$$Z = \frac{f_1}{f_2}$$

(f_1 Brennweite des Objektivs, f_2 Brennweite des Okulars).

B Beispiele

108. Auf eine ebene Glasplatte mit der Brechzahl $n = 1{,}5$ fällt ein Lichtstrahl. Unter welchem Winkel fällt der Strahl ein, wenn der gebrochene Strahl mit dem auf der Begrenzungsfläche reflektierten einen Winkel $\gamma = 60°$ einschließt?

Lösung

Wenn ein Lichtstrahl unter einem Winkel α auf eine Trennfläche einfällt, wird er unter dem Winkel $\alpha' = \alpha$ reflektiert und unter dem Winkel β gebrochen. Nach dem Brechungsgesetz gilt dabei

$$\sin \alpha = n \sin \beta. \tag{1}$$

Der reflektierte Strahl schließt mit dem gebrochenen den Winkel γ ein, deshalb gilt nach Bild 92

$$\beta = 2R - (\alpha + \gamma).$$

Nach Einsetzen in Gl. (1) gilt offensichtlich

$$\sin \alpha = n \sin [2R - (\alpha + \gamma)] = n \sin (\alpha + \gamma),$$

und weiter

$$\sin \alpha = n (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma). \qquad (2)$$

Wenn wir beide Seiten von Gl. (2) durch $\cos \alpha$ dividieren und die Gleichung nach $\tan \alpha$ auflösen, erhalten wir für den gesuchten Einfallswinkel

$$\tan \alpha = \frac{n \sin \gamma}{1 - n \cos \gamma}.$$

Wir setzen in die so gefundene Beziehung die gegebenen Werte ein und erhalten

$$\tan \alpha = \frac{\frac{3}{2} \sin 60°}{1 - \frac{3}{2} \cos 60°} = 3\sqrt{3},$$

also schließlich

$$\underline{\alpha = 79° \, 06'.}$$

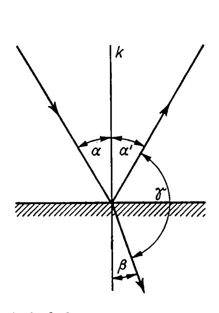


Bild 92

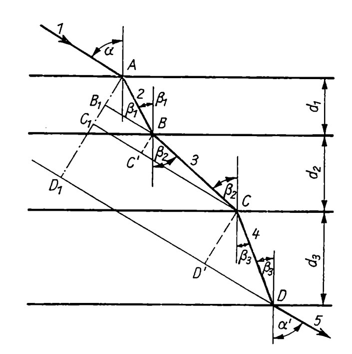


Bild 93

109. Ein Lichtstrahl, der sich zunächst in Luft ausbreitet, durchdringt nacheinander drei unterschiedlich brechende Substanzen, die durch parallele, ebene Begrenzungsflächen voneinander und von der Umgebung getrennt sind, und tritt nach Durchdringen dieser Stoffe erneut in die Luft ein (Bild 93). Es ist nachzuweisen, daß der in die Luft austretende Strahl nach mehrfacher Brechung gegenüber dem einfallenden Strahl nur parallel verschoben ist, und es ist das Maß dieser Parallelverschiebung zu bestimmen.

Die Brechzahlen der einzelnen Medien sind $n_1 = 1{,}5$; $n_2 = 1{,}3$; $n_3 = 1{,}4$; die Dicken der aufeinanderfolgenden planparallelen Schichten sind $d_1 = 2$ cm; $d_2 = 3$ cm; $d_3 = 4$ cm. Der Primärstrahl fällt auf die oberste Fläche unter dem Winkel $\alpha = 60°$ ein.

Lösung

Nach Bild 93 gilt für die erste Brechung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_1} = \frac{n_1}{n_0} \tag{1}$$

(n_0 Brechzahl der Luft).
Auf das zweite Medium fällt der Strahl unter dem Winkel β_1 ein, hier wird er unter dem Winkel β_2 gebrochen. Das Brechungsgesetz lautet hierbei

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{2}$$

Analog gilt für die Brechung im dritten Medium

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3} = \frac{n_3}{n_2}. \tag{3}$$

Wenn wir voraussetzen, daß der Strahl unter einem Winkel α' in die Luft austritt, dann gilt das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \beta_3}{\sin \alpha'} = \frac{n_0}{n_3}. \tag{4}$$

Wir multiplizieren die Gln. (1) bis (4) miteinander und erhalten nach Umformung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = 1,$$

was bedeutet, daß $\alpha = \alpha'$ ist.
Der Lichtstrahl tritt nach mehrmaliger Brechung nur parallelverschoben aus. Aus den Gln. (1) bis (3) ermitteln wir durch Einsetzen der für die Brechzahlen angegebenen Werte ohne weitere Mühe die zugehörigen Winkel

$$\beta_1 = 35°\,16'; \quad \beta_2 = 41°\,46'; \quad \beta_3 = 38°\,13'. \tag{5}$$

Die Gesamtverschiebung des austretenden Strahls (Nr. 5) gegenüber dem einfallenden (Nr. 1) beträgt nach Bild 93:

$$x = \overline{AD_1} = \overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1D_1}. \tag{6}$$

Jedoch ist

$$\overline{AB_1} = \overline{AB} \sin(\alpha - \beta_1) \quad \text{mit} \quad \overline{AB} = \frac{d_1}{\cos \beta_1},$$

$$\overline{B_1C_1} = \overline{BC'} = \overline{BC} \sin(\alpha - \beta_2) \quad \text{mit} \quad \overline{BC} = \frac{d_2}{\cos \beta_2}$$

und

$$\overline{C_1D_1} = \overline{CD'} = \overline{CD} \sin(\alpha - \beta_3) \quad \text{mit} \quad \overline{CD} = \frac{d_3}{\cos \beta_3}.$$

Nach Einsetzen dieser Beziehungen in Gl. (6) erhalten wir

$$x = \frac{d_1 \sin(\alpha - \beta_1)}{\cos \beta_1} + \frac{d_2 \sin(\alpha - \beta_2)}{\cos \beta_2} + \frac{d_3 \sin(\alpha - \beta_3)}{\cos \beta_3}.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich für die Verschiebung

$$x = \frac{2 \sin(60° - 35° 16')}{\cos 35° 16'} + \frac{3 \sin(60° - 41° 46')}{\cos 41° 46'} + \frac{4 \sin(60° - 38° 13')}{\cos 38° 13'};$$

$$\underline{x = 4{,}8 \text{ cm}}.$$

110. Ein Lichtstrahl fällt unter einem Winkel α so auf die Frontfläche eines optischen Prismas ein, daß der nach der Brechung durch das Prisma verlaufende Strahl die Rückfläche gerade unter dem Grenzwinkel trifft und deshalb nicht mehr austreten kann. Berechnen Sie die Brechzahl des Glases, aus dem das Prisma hergestellt wurde, wenn der brechende Winkel mit φ angegeben ist.

Lösung

Nach den in Bild 94 gewählten Bezeichnungen gilt

$$\beta_1 + \beta_2 = \varphi. \tag{1}$$

Für die Brechung auf der Frontfläche gilt nach dem Brechungsgesetz

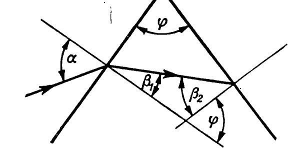


Bild 94

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_1} = n. \tag{2}$$

Unter Berücksichtigung der Bedingung, daß der Winkel β_2 auch der Grenzwinkel ist, können wir für die auf der Rückfläche eintretende Brechung schreiben

$$\sin \beta_2 = \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Gemäß Gl. (1) ist

$$\cos \varphi = \cos(\beta_1 + \beta_2) = \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2.$$

Wenn wir in diese Beziehung die aus den Gln. (2) u. (3) gewonnenen Werte für $\sin \beta_1$ und $\sin \beta_2$ einsetzen, können wir aus den trigonometrischen Beziehungen die entsprechenden Größen für $\cos \beta_1$ und $\cos \beta_2$ finden:

$$\cos \beta_1 = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n}, \quad \cos \beta_2 = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}.$$

Daraus erhalten wir

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n}\,\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - \frac{\sin\alpha}{n^2}.$$

Nach einer Umformung finden wir die Gleichung

$$n^4(\cos^2\varphi - 1) + n^2(1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi) = 0,$$

als deren Lösung wir schließlich die gesuchte Beziehung für die Brechzahl erhalten:

$$n = \frac{\sqrt{1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi}}{\sin\varphi}.$$

111. Zwei unterschiedliche optische Medien mit den Brechzahlen n_1 und n_2 sind durch eine ebene Begrenzungsfläche getrennt. Ermitteln Sie den Weg eines Lichtstrahls, der von einem gegebenen Punkt A im ersten Medium zu einem ebenfalls gegebenen Punkt B im zweiten in kürzestmöglicher Zeit gelangt.

Lösung

Wir setzen nach Bild 95 voraus, daß der Lichtstrahl auf dem Wege ACB verlaufen wird, wobei C einen auf der Trennfläche beider Medien liegenden Punkt darstellt. Wenn wir diesen Punkt als Ausgangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems wählen, dessen x-Achse in der Trennebene liegt, dann hat der Punkt A die Koordinaten (x, a) und der Punkt B die Koordinaten $(d - x, b)$, wenn wir den konstanten Abstand der beiden Fußpunkte von A und B, d. h. die Strecke A_1B_1, mit d bezeichnen.
Wenn die Lichtgeschwindigkeiten in den einzelnen Medien v_1 bzw. v_2 sind, dann ist die zum Durchlaufen des Weges AC erforderliche Zeit gegeben durch die Beziehung

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1}$$

und die für das Durchlaufen des Weges CB durch

$$t_2 = \frac{\sqrt{(d - x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

Die Gesamtzeit

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d - x)^2 + b^2}}{v_2}$$

soll ein Minimum sein. Das ist dann der Fall, wenn

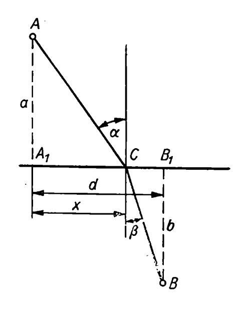


Bild 95

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

ist. Wir bilden diese Ableitung und finden

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d - x}{v_2 \sqrt{(d - x)^2 + b^2}} = 0. \tag{1}$$

Nach Bild 95 ist

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sin\alpha \quad \text{und} \quad \frac{d - x}{\sqrt{(d - x)^2 + b^2}} = \sin\beta, \tag{2}$$

wobei α bzw. β die Winkel darstellen, unter denen der Lichtstrahl auf die Trennfläche einfällt bzw. an ihr gebrochen wird. Nach Einsetzen von Gl. (2) in Gl. (1) erhalten wir

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2} = 0,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}, \quad \text{mit} \quad \frac{v_1}{v_2} = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

oder

$$\underline{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}}.$$

Das aber ist das bereits bekannte Brechungsgesetz. Beim Durchtritt aus einem Medium in ein anderes legt das Licht in kürzester Zeit eine Strecke zurück, die den Bedingungen des Brechungsgesetzes entspricht.

112. Ein durch Luft gehender Lichtstrahl fällt auf einen kugelförmigen Wassertropfen, wird in diesem gebrochen und tritt nach der Reflexion an der inneren Rückseite wieder aus. Berechnen Sie, unter welchem Winkel der Strahl einfallen muß, damit die Gesamtablenkung des roten Lichts, d. h. der Winkel zwischen einfallendem und austretendem Strahl, ein Maximum ist. Wie groß ist diese Ablenkung? Für rotes Licht hat der Wassertropfen eine Brechzahl $n_{\text{rot}} = 1{,}331$.

Lösung

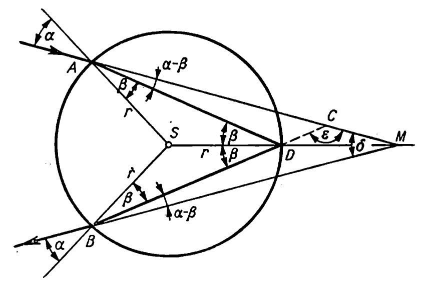


Bild 96

Aus Bild 96 ist leicht zu ersehen, daß der Winkel α, unter dem der Strahl aus dem Tropfen heraus und in die Luft übertritt, genausogroß ist wie der Winkel, unter dem der Lichtstrahl, aus der Luft kommend, in den Tropfen eindringt. Wenn wir die Gesamtablenkung zwischen eintretendem und austretendem Strahl mit dem Symbol δ bezeichnen, ergibt sich für diesen Wert aus $\triangle\, BCM$ die Beziehung

$$\delta = 2\text{R} - (\alpha - \beta + \varepsilon). \tag{1}$$

Andererseits haben wir für den Winkel ε aus $\triangle ADC$ die Beziehung

$$2R - \varepsilon + \alpha - \beta + 2R - 2\beta = 2R.$$

Das nach ε aufgelöst und in Gl. (1) eingesetzt, ergibt

$$\delta = 4\beta - 2\alpha. \tag{2}$$

Wenn dieser Winkel ein Maximum sein soll, muß die Bedingung

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = 0$$

erfüllt sein. Das führt uns zu einer Gleichung

$$4\frac{d\beta}{d\alpha} - 2 = 0. \tag{3}$$

Entsprechend dem Brechungsgesetz ist $\sin\alpha = n\sin\beta$. Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung nach α ableiten, erhalten wir mit Hilfe einer Umformung

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos\alpha}{n\cos\beta}$$

und nach Einsetzen in Gl. (3)

$$2\cos\alpha = n\cos\beta.$$

Als Lösung der beiden Gleichungen

$$2\cos\alpha = n\cos\beta \quad \text{und} \quad \sin\alpha = n\sin\beta$$

ermitteln wir den Winkel α, indem wir diese beiden Gleichungen quadrieren und addieren:

$$4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = n^2.$$

Nach Umformung ergibt das

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}.$$

Durch Einsetzen der Brechzahl für rotes Licht $n_{rot} = 1{,}331$ erhalten wir damit für den gesuchten Einfallswinkel

$$\underline{\alpha = 59^\circ\,32'\,17''.}$$

Der rote Lichtstrahl wird unter dem Winkel β_{rot} gebrochen. Dieser gehorcht der Gleichung

$$\sin\beta_{rot} = \frac{\sin\alpha}{n_{rot}},$$

woraus wir erhalten

$$\beta_{rot} = 40^\circ\,21'\,40''.$$

Für die Ablenkung des roten Strahles ergibt sich gemäß der Gl. (2) der Wert

$$\delta = 4\beta_{rot} - 2\alpha = \underline{42^\circ\,22'\,06''}.$$

113. Ein Beobachter steht am Rand eines Wasserbassins, dessen Wasserstand die Höhe $h = 2{,}81$ m hat, und betrachtet einen auf dem Grund des Bassins liegenden Gegenstand (Bild 97). In welcher Tiefe h' erscheint das Bild des beobachteten Gegenstandes, wenn die Richtung, in welcher der Beobachter das Bild sieht, mit der zum Wasserspiegel Senkrechten einen Winkel $\alpha = 60^\circ$ einschließt?

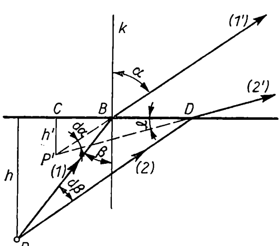


Bild 97

Lösung

Wir wählen aus dem Strahlenbündel, das vom Gegenstand P ausgeht und nach Brechung an der Trennfläche Wasser–Luft ins Auge des Beobachters trifft, zwei Strahlen (1) und (2) aus, die den sehr kleinen Winkel $d\beta$ einschließen. Die gebrochenen Strahlen (1′) und (2′), die, vom Scheinbild P' ausgehend, zum Auge kommen, schließen den Winkel $d\alpha$ ein.

Nach den in Bild 97 angegebenen Bezeichnungen gilt

$$\overline{BP'} = \frac{h'}{\cos\alpha} \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \overline{BP} = \frac{h}{\cos\beta} \quad (2)$$

und in $\triangle BDP'$ nach dem Sinussatz

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BP'}} = \frac{\sin d\alpha}{\sin\gamma}. \tag{3}$$

Da $\sin d\alpha \approx d\alpha$, $\gamma = R - (\alpha + d\alpha)$ und $\sin\gamma = \sin[R - (\alpha + d\alpha)] = \cos(\alpha + d\alpha) \approx \approx \cos\alpha$ ist, können wir Gl. (3) auch in der Form

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BP'}} \approx \frac{d\alpha}{\cos\alpha} \tag{4}$$

schreiben. Auf analoge Weise erhalten wir aus $\triangle BDP$ die Gleichung

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BP}} \approx \frac{d\beta}{\cos\beta}. \tag{5}$$

Wenn wir die beiden Gln. (4) u. (5) dividieren und das Resultat mit dem Ausdruck $\overline{BP}/\overline{BP'}$ vergleichen, der sich aus den Gln. (1) u. (2) ergibt, dann erhalten wir

$$\frac{h'\,d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{h\,d\beta}{\cos^2\beta}. \tag{6}$$

Den Quotienten $d\alpha/d\beta$ ermitteln wir aus dem Brechungsgesetz. Durch Ableiten der Gleichung $\sin\alpha = n\sin\beta$ nach dem Winkel α erhalten wir

$$\cos\alpha = n\cos\beta\,\frac{d\beta}{d\alpha}\,,$$

woraus folgt

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = n\,\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\,.$$

Nach Einsetzen dieses Ausdrucks in Gl. (6) finden wir für die scheinbare Tiefe

$$h' = \frac{h}{n}\,\frac{\cos^3\alpha}{\cos^3\beta}\,. \tag{7}$$

Den unbekannten Winkel β bestimmen wir aus dem Brechungsgesetz

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}\,,$$

womit wir nach Umformung erhalten

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n}\,.$$

Für die scheinbare Tiefe folgt damit aus Gl. (7)

$$h' = hn^2\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)^3.$$

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich schließlich

$$h' = 2{,}81\ \text{m}\cdot 1{,}33^2\left(\frac{\cos 60^\circ}{\sqrt{1{,}33^2 - \sin^2 60^\circ}}\right)^3 = \underline{0{,}6\ \text{m}}\,.$$

114. Aus einer punktförmigen Lichtquelle fällt ein Lichtstrahl senkrecht auf einen Planspiegel, von dem aus er auf einen 5 m entfernt stehenden Leuchtschirm reflektiert wird. Der Planspiegel rotiert um eine zur Leuchtschirmebene parallele Achse, so daß der reflektierte Lichtpunkt auf dem Leuchtschirm eine Spur zieht. In jeder Sekunde werden 10 Umdrehungen ausgeführt. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich die Lichtspur auf dem Leuchtschirm bewegt und welchen Wert die Geschwindigkeit in dem Punkt des Leuchtschirms annimmt, der dem Planspiegel am nächsten liegt.

Lösung

Wenn der Spiegel mit der konstanten Frequenz ν rotiert, ist auch seine Winkelgeschwindigkeit konstant gleich

$$\omega = 2\pi\nu\,.$$

Wir messen den Einfallswinkel des Lichtstrahls gegenüber dem Einfallslot auf der Spiegelfläche. In der Ausgangsstellung ist $\alpha = 0$. Nach der Drehung des Spiegels um den Winkel $\alpha = \omega t$ (Bild 98) weicht der unter einem Winkel α einfallende Strahl um den doppelten Wert $2\alpha = 2\omega t$ ab, und die Leuchtspur auf dem Bildschirm verschiebt sich um den Betrag x, für den gilt

$$x = d \tan 2\omega t .$$

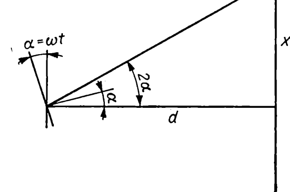


Bild 98

Die Momentangeschwindigkeit des die Lichtspur zeichnenden Lichtpunktes ist

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\omega d}{\cos^2 2\omega t} .$$

Immer wenn die Lichtspur durch den Punkt des Leuchtschirms geht, der dem Spiegel am nächsten gelegen ist, fällt der Lichtstrahl unter einem Winkel $\alpha = 2\pi k$ ein, wobei $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ist. Die Geschwindigkeit des Lichtpunktes in dieser Stellung ist

$$v = 200\,\pi\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \underline{628\,\mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

115. Vor einem Konkavspiegel befindet sich in 60 cm Abstand eine Kerze. Wenn wir sie um 10 cm näher an den Spiegel heranrücken, so vergrößert sich der Abstand ihres Bildes vom Spiegel um 80 cm. Welche Brennweite hat der Spiegel?

Lösung

Wenn wir die Abbildungsgleichung des Spiegels in der Form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

anwenden, dann ist in der erstgenannten Stellung die Gleichung

$$\frac{1}{60\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

erfüllt, während in der darauffolgenden Stellung gilt

$$\frac{1}{50\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{b + 80\,\mathrm{cm}} = \frac{1}{f} . \tag{2}$$

Durch Gleichsetzen der Gln. (1) u. (2) erhalten wir

$$\frac{1}{60\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{50\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{b + 80\,\mathrm{cm}} ,$$

woraus wir nach Umformung die quadratische Gleichung

$$b^2 + 80b - 24000 = 0$$

erhalten, die auf die Lösungen $b_1 = 120$ cm und $b_2 = -200$ cm führt. Durch Einsetzen dieser Werte in eine der Gln. (1) oder (2) erhalten wir für die Brennweiten die 2 Lösungen

$$\underline{f_1 = 40\text{ cm}}, \quad \underline{f_2 = 85{,}7\text{ cm}}.$$

116. Ein Konvex- und ein Konkavspiegel mit gleichem Krümmungsradius r_0 sind mit ihren Spiegelflächen einander so gegenübergestellt, daß ihre optischen Achsen zusammenfallen und ihre Scheitel den Abstand $d = 2r_0$ haben (Bild 99). Es soll ein auf der gemeinsamen optischen Achse gelegener Punkt gesucht werden, für den gilt, daß die von einer hier aufgestellten Lichtquelle ausgehenden Strahlen nach Reflexion auf Konvex- und Konkavspiegel wieder im Ausgangspunkt zusammentreffen.

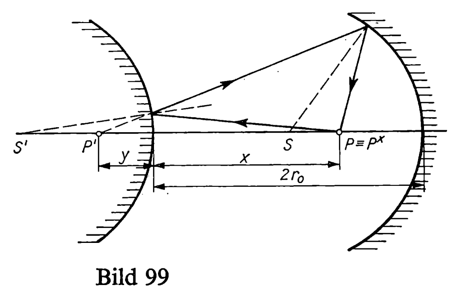


Bild 99

Lösung

Den auf der Achse liegenden Lichtpunkt bilden wir zunächst durch den Konvexspiegel, das so entstandene Bild durch den Konkavspiegel ab. Danach formulieren wir die Bedingung, daß das resultierende Bild im Ausgangspunkt entworfen wird.
Wenn wir den Lichtpunkt P in einem Abstand $a = x$ vor dem Konvexspiegel aufstellen, so entwirft dieser ein virtuelles Bild P' im Abstand $b = -y\,(y > 0)$ hinter dem Scheitelpunkt des Spiegels. Für diese Abbildung gilt

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{2}{r_0}. \tag{1}$$

Der Abstand des vom Konvexspiegel entworfenen Bildes P' vom Scheitelpunkt des Konkavspiegels hat die Größe $a_2 = 2r_0 + y$. Wenn das resultierende Bild P^* wieder im Ausgangspunkt P erscheinen soll, muß seine vom Scheitelpunkt des Konkavspiegels aus gemessene Bildweite

$$b_2 = 2r_0 - x$$

sein. Nach der Abbildungsgleichung für Spiegel gilt weiter

$$\frac{1}{2r_0 + y} + \frac{1}{2r_0 - x} = \frac{2}{r_0}. \tag{2}$$

Die Kombination der Gln. (1) u. (2) führt zu einer quadratischen Gleichung

$$2x^2 - 2r_0 x - r^2 = 0,$$

deren Wurzeln $x_1 = 1{,}35\, r_0$ und $x_2 = -0{,}35\, r_0$ sind. Physikalisch sinnvoll ist nur die erste der beiden Lösungen. Demzufolge muß die Lichtquelle vom Konvexspiegel in der Entfernung

$$\underline{s = 1{,}35\, r_0}$$

angeordnet sein.

117. Eine dünne, plankonkave Linse ist in horizontaler Stellung so in Wasser getaucht, daß der unter der Konkavfläche liegende Raum mit Luft gefüllt ist. Die Gesamtbrechkraft des optischen Systems hat den Wert $D = -2{,}6$ dpt. Bestimmen Sie den Krümmungsradius der Linse (Bild 100).

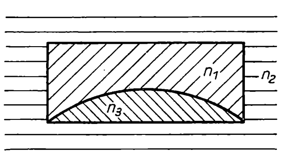


Bild 100

Lösung

Es handelt sich hier um ein zentriertes optisches System, das sich aus zwei dicht aneinanderliegenden Linsen zusammensetzt. Die Brechkraft eines solchen Systems ist gleich der Summe der Brechkräfte der beiden das System bildenden Einzellinsen.

Die erste Linse aus Glas ist plankonkav und befindet sich in Wasser. Ihre Brechkraft ist

$$D_1 = \frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{1}$$

wobei n die relative Brechzahl des Glases gegenüber dem umgebenden Wasser bedeutet. Wenn n_1 bzw. n_2 die absoluten Brechzahlen des Glases bzw. des Wassers selbst sind, so ist

$$n = \frac{n_1}{n_2}.$$

Da es sich im vorliegenden Fall um eine plankonkave Linse handelt, ist $r_1 = -r_0$ und $r_2 = \infty$. Aus Gl. (1) wird damit

$$D_1 = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(-\frac{1}{r_0}\right).$$

Die zweite Linse kann als eine aus Luft bestehende Plankonvexlinse angesehen werden, die sich in einer Wasserumgebung befindet. Ihre Krümmungsradien sind $r_1 = r_0$ und $r_2 = \infty$. Ihre Brechkraft wird

$$D_2 = \left(\frac{n_3}{n_2} - 1\right)\frac{1}{r_0},$$

wobei n_3 die absolute Brechzahl der Luft bedeutet. Die Brechkraft des gesamten aus zwei Linsen bestehenden Systems wird

$$D = D_1 + D_2 = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(-\frac{1}{r_0}\right) + \left(\frac{n_3}{n_2} - 1\right)\frac{1}{r_0}.$$

Nach einer Umformung erhalten wir

$$D = \frac{n_3 - n_1}{n_2}\,\frac{1}{r_0},$$

woraus sich der gesuchte Krümmungsradius der Linse berechnen läßt:

$$r_0 = \frac{n_3 - n_1}{n_2}\,\frac{1}{D}.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$r_0 = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} \frac{1\ \text{m}}{-2{,}6} = \underline{14{,}42\ \text{cm}}.$$

118. Beweisen Sie, daß bei einer Sammellinse der Brennweite f der kleinste Abstand zwischen Gegenstand und Bild den Wert $s = 4f$ haben muß.

Lösung

Gemäß der Bedingung, daß der Abstand Gegenstand – Bild, d. h. $s = g + b$, ein Minimum darstellt, ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}(g + b) = 0, \tag{1}$$

wobei g der Abstand des Gegenstands und b der des Bildes von der Linse ist. Aus der Abbildungsgleichung der Linse

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

ergibt sich für b die Beziehung

$$b = \frac{gf}{g - f}.$$

Für den Abstand Bild – Gegenstand s erhalten wir demnach

$$s = g + b = g + \frac{gf}{g - f} = \frac{g^2}{g - f}. \tag{2}$$

Somit kann die Minimumbedingung (1) geschrieben werden in der Form

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{g^2}{g - f}\right)}{\mathrm{d}g} = \frac{2g(g - f) - g^2}{(g - f)^2} = 0.$$

Daraus folgt nach Umformung unter der Voraussetzung, daß $g \neq f$ ist, die Gleichung

$$g^2 - 2gf = 0,$$

mit der Lösung $g = 2f$.
Wenn wir die zweite Ableitung bilden, können wir uns leicht davon überzeugen, daß der gefundene Wert $g = 2f$ tatsächlich der geforderten Minimumbedingung gerecht wird. Aus Gl. (2) resultiert für die kleinste Entfernung zwischen Bild und Gegenstand

$$\underline{s = g + b = 4f.}$$

119. Eine Lichtquelle befindet sich im Abstand l von einem Bildschirm. Es ist zu berechnen, in welchem Abstand von der Lichtquelle eine dünne Sammellinse der Brennweite f angeordnet sein muß, damit auf dem Bildschirm ein reelles Bild der Lichtquelle entsteht. Die Bedingung, unter der das möglich ist, soll in Worten ausgedrückt werden.

Lösung

Da der Abstand des Bildschirms von der Lichtquelle mit l vorgegeben ist, entspricht dem Abstand g des Gegenstands von der Linse das Bild im Abstand $b = l - g$. Nach Einsetzen in die Abbildungsgleichung für die Linse erhalten wir

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{l-g} = \frac{1}{f}.$$

Wir lösen diese Gleichung nach g auf und erhalten

$$g = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}.$$

Wenn die Differenz $l^2 - 4lf > 0$ ist, was sicher erfüllt ist, solange $l > 4f$ ist, so gibt es zwei verschiedene Stellungen für die Linse, bei denen für konstant gehaltenen Abstand Gegenstand – Bildschirm auf letzterem ein scharfes Bild entsteht. Dies sind die Stellungen

$$\underline{g_1 = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - f}}, \quad \underline{g_2 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - f}}.$$

Im Falle, daß $l = 4f$ ist, gibt es nur eine derartige Stellung, nämlich

$$\underline{g = \frac{l}{2}},$$

und für den Fall, daß $l < 4f$ ist, existiert gar keine.

120. Ein auf der optischen Achse einer Sammellinse beweglicher Punkt nähert sich der Linse mit der konstanten Geschwindigkeit v_1. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich dabei sein Bild?

Lösung

Wenn wir den Abstand des Gegenstands vom Gegenstandsbrennpunkt mit x und den Abstand des Bildes vom Bildbrennpunkt mit x' bezeichnen, dann können wir die Abbildungsgleichung in folgender Form schreiben:

$$xx' = f^2. \tag{1}$$

Die Momentangeschwindigkeit des Bildes v_2 ist durch die erste Ableitung seines Weges nach der Zeit definiert, also

$$v_2 = \frac{dx'}{dt}.$$

Entsprechend Gl. (1) ist $x' = f^2/x$, und deshalb wird

$$v_2 = \frac{d\left(\frac{f^2}{x}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{f^2}{x}\right)}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{f^2}{x^2}\frac{dx}{dt}.$$

Unter der Berücksichtigung, daß $dx/dt = v_1$ die Momentangeschwindigkeit des Gegenstands ist, erhalten wir nach einer Umformung die Bildgeschwindigkeit

$$v_2 = -\frac{x'}{x}v_1.$$

121. Im Innern einer Glaskugel des Radius $r_0 = 10$ cm befindet sich im Glasfluß eine Luftblase. Ein Beobachter, der die Luftblase in der Richtung der optischen Achse der brechenden Kugelfläche erblickt, hat den Eindruck, daß die Luftblase in einem Abstand $b_0 = 2{,}5$ cm unter der Kugeloberfläche sitzt. Bestimmen Sie den tatsächlichen Abstand der Luftblase von der Kugeloberfläche.

Lösung

Für die Brechung an einer Kugelfläche, die zwei Stoffe mit den absoluten Brechzahlen n_1 und n_2 trennt, gilt die Beziehung

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \tag{1}$$

Der Gegenstand, ein Lufteinschluß, befindet sich im Innern des Glases. Wir suchen seinen Abstand g vom Scheitelpunkt der Kugeloberfläche. An der konvexen Kugeloberfläche kommt es zur Brechung, bei welcher der Lichtstrahl aus dem Glas mit der Brechzahl $n_1 = n$ in die Luft mit der Brechzahl $n_2 = 1$ übertritt. Das dabei entstehende Bild ist virtuell.
Unter Beachtung der Vorzeichen können wir schreiben

$$b = -b_0, \quad r = -r_0.$$

Dies – in Gl. (1) eingesetzt – führt auf

$$\frac{n}{g} - \frac{1}{b_0} = -\frac{1-n}{r_0},$$

und – nach g aufgelöst –

$$g = \frac{nr_0b_0}{r_0 + b_0(n-1)}.$$

Mit den gegebenen Werten erhalten wir für die gesuchte Gegenstandsweite des Lufteinschlusses

$$g = \frac{1{,}5 \cdot 10 \cdot 2{,}5}{10 + 2{,}5 \cdot 0{,}5}\,\text{cm} = \underline{3{,}3\,\text{cm}}.$$

122. Ein Glasstab mit der Brechzahl $n = {}^3/_2$ ist an seinen beiden Enden durch Kugelschliffe mit dem gleichen Radius r_0 begrenzt. Der Stab hat die Länge $3r_0$, die Kugelflächen haben eine gemeinsame optische Achse, die mit der Längsachse des Stabes identisch ist. In einem Abstand von r_0 vor der vorderen konkaven Kugelfläche befindet sich eine punktförmige Lichtquelle auf der optischen Achse. Es ist zu berechnen, in welchem Abstand von der hinteren konvexen Kugelfläche das Bild entsteht.

Lösung

Das resultierende Bild der Punktquelle erhalten wir durch eine schrittweise Abbildung des Gegenstands durch die erste und dann durch die zweite Kugelfläche. Das durch die erste Abbildung entstandene Bild betrachten wir als den für die zweite Abbildung vorzusehenden Gegenstand. Die zweite Abbildung erzeugt dann das endgültige Bild. Für die Brechung an einer Kugelfläche mit dem Radius r, die zwei Stoffe mit den absoluten Brechzahlen n_1 und n_2 trennt, gilt die Beziehung

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \tag{1}$$

Bei der Brechung an der ersten Kugelfläche tritt der aus der Luft kommende Strahl ins Glas ein, die Kugelfläche ist hier konkav. Daher ist $n_1 = 1$, $n_2 = n$, $r = r_0$; und da auch $g = r_0$ ist, finden wir nach Einsetzen in Gl. (1)

$$\frac{1}{r_0} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r_0},$$

woraus sich ergibt

$$b = r_0 \frac{n}{n-2}.$$

Das durch die erste Kugelfläche entworfene Bild hat vom Scheitelpunkt der zweiten den Abstand

$$g' = 3r_0 - b = 2r_0 \frac{n-3}{n-2}.$$

Bei der Brechung an der zweiten, hinteren Kugelfläche tritt der Strahl aus dem Glas in die Luft aus. Hier ist $n_1 = n$, $n_2 = 1$, $r = -r_0$. Nach Einsetzen dieser Größen in Gl. (1) finden wir

$$\frac{n}{2r_0 \dfrac{n-3}{n-2}} + \frac{1}{b'} = -\frac{1-n}{r_0},$$

wobei wir den Abstand des durch die zweite Kugelfläche entworfenen Bildes vom Scheitelpunkt der zweiten Kugelfläche mit b' bezeichnen. Daraus ergibt sich

$$b' = 2r_0 \frac{n-3}{n^2 - 6n + 6}.$$

Wir setzen für n den Wert $^3/_2$ ein und erhalten

$$\underline{b' = 4r_0.}$$

123. Ermitteln Sie die Dicke einer bikonvexen Glaslinse, die in Luft als Zerstreuungslinse wirken soll. Die Radien der die Linse begrenzenden Kugelflächen sind $r_1 = r_2 = 1$ cm.

Lösung

Für die Brechkraft einer dicken Linse, die auf beiden Seiten vom gleichen Medium umgeben ist, gilt die Beziehung

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - \frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{r_1 r_2}.$$

Als Zerstreuungslinse wird eine Linse dann wirken, wenn dieser Ausdruck negativ wird. Da hier $n > 1$, $r_1 > 0$ und auch $r_2 > 0$ ist, kann diese Bedingung nur erfüllt sein, wenn

$$\frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{r_1 r_2} > (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

ist. Diese Ungleichung läßt sich vereinfachen in

$$\frac{n-1}{n} d > r_1 + r_2.$$

Daraus ergibt sich für die gesuchte Dicke die Bedingung

$$d > \frac{n}{n-1}(r_1 + r_2).$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir

$$d > \frac{1{,}5}{1{,}5 - 1}(1 + 1)\,\text{cm} = 6\,\text{cm};$$

$$\underline{d > 6\,\text{cm}.}$$

124. Ein zentriertes optisches System besteht aus zwei dünnen Linsen mit den Brechkräften $D_1 = 2$ dpt und $D_2 = 5$ dpt, die voneinander einen Abstand $d = 10$ cm haben. Es ist zu berechnen, in welchem Abstand vom Mittelpunkt der ersten Linse der Bildbrennpunkt des gesamten Systems liegt.

Lösung

Ein auf der optischen Achse des Systems liegender Punkt, der von der ersten Linse den Abstand g_1 hat, wird vom Linsensystem in einem ebenfalls auf der optischen Achse liegenden Punkt abgebildet. Dieser hat von der zweiten Linse den Abstand b_2. Bei schrittweiser Abbildung in der Art, daß der Gegenstand zunächst durch die erste Linse dargestellt wird und das so entstandene Zwischenbild als Gegenstand für die zweite Linse dient, entwirft diese dann das resultierende Bild. Die Brechung an der ersten Linse läßt sich dann wie folgt beschreiben:

$$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}.$$

Hieraus erhalten wir eine Beziehung für den Abstand des durch die erste Linse entworfenen Zwischenbildes von ihrem Scheitelpunkt

$$b_1 = \frac{g_1 f_1}{g_1 - f_1}. \tag{1}$$

Für die an der zweiten Linse stattfindende Brechung gilt

$$\frac{1}{g_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}, \tag{2}$$

wobei g_2 den Abstand des durch die erste Linse entworfenen Zwischenbildes von der zweiten Linse darstellt. Nach Gl. (1) gilt offenbar

$$g_2 = d - b_1 = d - \frac{g_1 f_1}{g_1 - f_1}$$

und nach einer Umformung

$$g_2 = \frac{d - f_1 - \frac{d f_1}{g_1}}{1 - \frac{f_1}{g_1}}.$$

Entsprechend Gl. (2) gilt für die Bildweite b_2

$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1 - \frac{f_1}{g_1}}{d - f_1 - \frac{d f_1}{g_1}}. \tag{3}$$

Im Bildbrennpunkt des Systems wird der auf der optischen Achse im Unendlichen liegende Punkt abgebildet. Wenn wir seinen Abstand von der zweiten Linse mit dem Symbol f_0 kennzeichnen, resultiert für $g_1 = \infty$ die Bildweite $b_2 = f_0$. Nach Einsetzen in Gl. (3) und nach einer Umformung erhalten wir dafür

$$f_0 = \frac{f_2(f_1 - d)}{f_1 + f_2 - d}.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$f_0 = \frac{0{,}2\,\text{m}\,(0{,}5\,\text{m} - 0{,}1\,\text{m})}{0{,}5\,\text{m} + 0{,}2\,\text{m} - 0{,}1\,\text{m}} = 0{,}133\,\text{m}.$$

Der Abstand des Bildbrennpunkts vom Mittelpunkt der ersten Linse ist

$$s = d + f_0 = \underline{0{,}233\,\text{m}}.$$

125. Eine Lupe mit der Brennweite $f = 5$ cm entwirft von einem Gegenstand ein Bild in der Bildweite $|b| = 40$ cm. Welche Vergrößerung liefert die Lupe, wenn das beobachtende Auge sich im Abstand $|c| = 2$ cm befindet?

Lösung

Das von der Lupe entworfene Bild ist aufrecht, virtuell und vergrößert (Bild 101). Der abzubildende Gegenstand befindet sich innerhalb der Brennweite der Lupe. Die gesuchte Winkelvergrößerung der Lupe hat den Wert

$$Z = \frac{u'}{u},$$

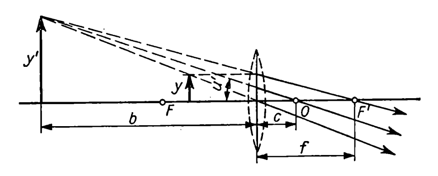


Bild 101

wobei u' den Winkel darstellt, unter dem sich das von der Lupe entworfene Bild dem Auge O bietet, während u den Winkel darstellt, unter dem das unbewaffnete Auge den Gegenstand innerhalb der deutlichen Sehweite l sehen würde. Entsprechend der Abbildung können wir schreiben

$$u' \approx \tan u' = \frac{y'}{|b| + |c|}, \quad u \approx \tan u = \frac{y}{l}.$$

Für die Vergrößerung gilt dann

$$Z = \frac{u'}{u} = \frac{y'}{y} \frac{l}{|b| + |c|}. \tag{1}$$

Die Linearvergrößerung y'/y der Linse bestimmen wir aus der Gleichung

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f} = -\frac{b - f}{f} = -\frac{-40\,\text{cm} - 5\,\text{cm}}{5\,\text{cm}},$$

und nach Einsetzen dieser Werte in Gl. (1) erhalten wir für die Vergrößerung der Lupe

$$Z = 9\,\frac{25\,\text{cm}}{40\,\text{cm} + 2\,\text{cm}} = \underline{5{,}36}.$$

126. Die Brennweite eines Mikroskopobjektivs beträgt $f_1 = 0{,}3$ cm, die des Okulars $f_2 = 3$ cm, die optische Tubuslänge $s = 16$ cm. Es ist zu ermitteln, in welchem Abstand vor dem Objektiv sich ein Gegenstand befinden muß, damit das durch das Mikroskop beobachtende Auge das Bild des Gegenstands in der deutlichen Sehweite $l_0 = 25$ cm erblicken kann.

Lösung

Das Objektiv entwirft von dem Gegenstand, der sich vor ihm im Abstand d befindet, ein Zwischenbild im Abstand b_1 hinter dem Objektiv. Entsprechend der Abbildungsgleichung gilt danach

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}. \tag{1}$$

Das vom Objektiv entworfene Zwischenbild befindet sich im Abstand

$$g_2 = s - b_1 \tag{2}$$

vom Okular und wird von diesem so dargestellt, daß es von einem dicht dahinter befindlichen Auge als in der deutlichen Sehweite l_0 stehend wahrgenommen wird. Dieses Bild selbst ist virtuell und befindet sich vom Okular in der Entfernung

$$b_2 = -l_0. \tag{3}$$

Aus der für das Okular geltenden Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{g_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}$$

erhalten wir nach Einsetzen der Gln. (2) u. (3)

$$b_1 = s - \frac{l_0 f_2}{l_0 + f_2}$$

und nach Einsetzen der gegebenen Werte

$$b_1 = 13{,}32\,\text{cm}.$$

Mit Hilfe der Gl. (1) erhalten wir eine Beziehung für die gesuchte Entfernung Gegenstand – Objektiv

$$d = \frac{b_1 f_1}{b_1 - f_1}$$

bzw. mit den gegebenen Werten

$$\underline{d = 0{,}307\,\text{cm}.}$$

A Aufgaben

146. Berechnen Sie den Winkel, um den ein Lichtstrahl aus seiner ursprünglichen Richtung abweicht, wenn er, aus dem Wasser kommend, a) in Glas und b) in die Luft übertritt und sein Einfallswinkel einmal 15° und einmal 75° beträgt.

147. Unter welchem Winkel müßte ein Lichtstrahl auf eine Glasplatte mit der Brechzahl $n = 1{,}57$ einfallen, damit reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht aufeinanderstehen?

148. Unter welchem Winkel müßte ein Lichtstrahl auf die Trennfläche von Glas und

Luft einfallen, damit er nicht mehr in die Luft austreten kann?

149. Ein Lichtstrahl trifft unter dem Winkel $\varphi = 70°$ auf eine planparallele Glasplatte von 10 cm Dicke und der Brechzahl $n = 1{,}5$. Berechnen Sie den Betrag der Parallelversetzung, die der durchgehende Strahl erleidet.

150. Unter einer 12 cm dicken Glasplatte befindet sich eine Münze. Sie wird von einem Beobachter gesehen, dessen Auge senkrecht auf die Glasplatte schaut; es ist von dieser 10 cm entfernt. In welcher Entfernung, vom Auge des Beobachters aus gemessen, erscheint das Bild der Münze?

151. Auf ein Prisma mit dem brechenden Winkel $\gamma = 54°$ fällt ein monochromatischer Lichtstrahl, für dessen Wellenlänge die Brechzahl des Prismas den Wert $n = 1{,}63$ hat. Wie groß ist die minimale Ablenkung des Lichtstrahls beim Durchgang durch das Prisma?

152. Ein optisches Prisma, dessen brechender Winkel 50° ist, erlaubt für einen durchgehenden Lichtstrahl eine minimale Ablenkung von 35°. Wie verändert sich dieser Winkel, wenn das Prisma ganz in Wasser untergetaucht wird?

153. Auf ein Prisma mit der Brechzahl $n = \sqrt{2}$ fällt ein Lichtstrahl so, daß er auf die vordere Fläche des Prismas senkrecht auftrifft. Berechnen Sie, wie groß der brechende Winkel dieses Prismas höchstens sein darf, damit der austretende Lichtstrahl an der rückwärtigen Fläche gebrochen wird.

154. Zwei Planspiegel schließen miteinander den Winkel φ ein. Auf einen der beiden Spiegel fällt ein Lichtstrahl, der in einer senkrecht zur Schnittlinie beider Spiegel orientierten Ebene liegt. Der Strahl wird erst auf dem ersten, dann auf dem zweiten Spiegel reflektiert und weicht dabei gegenüber seiner ursprünglichen Richtung um den Winkel ψ ab. Ermitteln Sie, wie groß dieser Winkel ist und in welcher Weise er vom Einfallswinkel abhängt.

155. Von einem Felsen aus, der in einer Höhe $h = 76$ m über der spiegelnden Oberfläche eines Sees liegt, wird eine Wolke unter einem Höhenwinkel $\varphi = 56°$ beobachtet. Ihr Spiegelbild erscheint im See unter einem Winkel $\psi = 58°$ gegenüber der Horizontalen nach unten gemessen. Wie groß ist die tatsächliche Höhe der Wolke?

156. a) Auf der optischen Achse eines Konkavspiegels befindet sich eine punktförmige Lichtquelle. Ihr Abstand vom Scheitelpunkt des Spiegels ist gleich $^3/_2$ des Spiegelradius. Bestimmen Sie die Lage des Bildes.

b) Auf einer optischen Achse eines Konvexspiegels befindet sich eine punktförmige Lichtquelle im n-fachen Abstand seiner Brennweite vom Spiegelscheitel entfernt. Bestimmen Sie auch hier die Lage des Bildes.

157. Gegeben ist ein sphärischer Konkavspiegel mit einem Krümmungsradius von 56 cm. In welchem Abstand vom Scheitelpunkt des Spiegels muß man einen Gegenstand aufstellen, damit sein Bild

a) reell und viermal vergrößert,

b) virtuell und viermal vergrößert

erscheint? Ermitteln Sie die Lage des Bildes.

158. Ein Gegenstand von 1,5 cm Höhe befindet sich 32 cm vom Scheitelpunkt eines Konkavspiegels entfernt, dessen Krümmungsradius 48 cm beträgt. Bestimmen Sie die Art des entstehenden Bildes, seine Bildweite und Bildgröße.

159. Ein Spiegelgalvanometer enthält einen kleinen Konkavspiegel. Im Abstand $l = 1$ m vor diesem befindet sich eine waagerechte Skale und unmittelbar darunter ein beleuchteter Spalt. Berechnen Sie, welchen Krümmungsradius der Galvanometerspiegel haben muß, damit auf der Skale ein reelles Bild des Spalts

entworfen wird. Berechnen Sie weiter, um welchen Betrag die Lichtspur des Spalts auf der Skale ausgelenkt wird, wenn der Spiegel sich um den kleinen Winkel φ dreht.

160. Ein Konkavspiegel hat eine Brennweite $f = 16$ cm. In welchen Abstand von diesem Spiegel muß ein Beobachter sein Auge bringen, damit er das Abbild seines eigenen Auges in der deutlichen Sehweite 24 cm erblickt?

161. Ein Konkav- und ein Konvexspiegel mit derselben Brennweite $f = 20$ cm stehen einander in einem Abstand $l = 50$ cm so gegenüber, daß ihre beiden optischen Achsen zusammenfallen. In einem Abstand $g = 30$ cm vom Konkavspiegel befindet sich ein punktförmiger leuchtender Gegenstand. Wo wird sein Bild entstehen, wenn das Licht a) zuerst auf dem Konkavspiegel, dann auf dem Konvexspiegel und b) zuerst auf dem Konvexspiegel, dann auf dem Konkavspiegel reflektiert wird?

162. Ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse und bildet dabei einen Konkavspiegel. Berechnen Sie die Brennweite dieses Spiegels.

163. Eine dünne Sammellinse bildet einen 20 cm vor ihr gelegenen Gegenstand in einer Entfernung von 35 cm hinter sich ab. Wie groß ist ihre Brennweite, und welche Vergrößerung tritt auf?

164. Eine Sammellinse der Brennweite $f = 42$ cm entwirft von einem Gegenstand ein dreifach vergrößertes, virtuelles Bild. Bestimmen Sie Gegenstands- und Bildweite.

165. Eine dünne Bikonvexlinse der Brechkraft D entwirft von einem Gegenstand ein Bild mit der Vergrößerung Z. Berechnen Sie Gegenstands- und Bildweite.

166. In einem Punkt P konvergiert ein Strahlenbündel, das vor Erreichen dieses Punktes durch eine Zerstreuungslinse aufgefangen wird, deren Brechkraft den Wert $D = -{}^{10}/_{6}$ dpt hat. Bestimmen Sie rechnerisch die Bildweite, wenn die auffangende Zerstreuungslinse von dem Punkt 90 cm entfernt ist.

167. Eine plankonvexe Glaslinse mit einem Krümmungsradius $r_1 = 14$ cm entwirft von einem Gegenstand ein Bild in der Bildweite b, die um 1,05 m kleiner ist als die Gegenstandsweite. Wie groß ist die Gegenstandsweite und Bildweite für $n = 1{,}5$?

168. Die Brechkraft einer bikonvexen Glaslinse hat in Luft den Wert $D_0 = 12$ dpt. Welchen Wert nimmt die Brechkraft an, wenn die Linse in Wasser getaucht ist?

169. Eine dünne bikonvexe Glaslinse entwirft von einem Gegenstand ein Bild in der Bildweite $b_1 = 10$ cm. Gegenstand und Linse seien auf einer optischen Bank montiert, die ohne Veränderung der Gegenstandsweite vollständig in Wasser getaucht wird. Dabei verändert sich die Bildweite auf einen Wert $b_2 = 60$ cm. Wie groß ist die Brennweite dieser Linse in Luft?

170. Eine optische Bank trägt Lichtquelle, Sammellinse und Schirm. Die Sammellinse entwirft auf dem Schirm das Bild der Lichtquelle, deren Abstand vom Schirm $l = 1$ m beträgt. Wenn wir, ohne die Lage von Lichtquelle und Schirm zu verändern, die Linse 20 cm näher an den Schirm verschieben, so wird in dieser zweiten Stellung die Lichtquelle erneut auf dem Schirm scharf abgebildet. Wie groß ist die Brennweite der Linse?

171. Auf einem Schirm wird durch eine Sammellinse ein Gegenstand so abgebildet, daß die Bildgröße den Wert $B_1 = 9$ cm hat. Bei Fixierung von Gegenstand und Schirm wird die Linse an den Schirm herangefahren, wobei sich herausstellt, daß in einer zweiten Stellung ein scharfes Bild der Größe $B_2 =$

$= 4$ cm entsteht. Berechnen Sie die wahre Gegenstandsgröße G.

172. Die Brennweite einer Sammellinse ist f Berechnen Sie, in welchem Abstand von der Linse eine Lichtquelle aufgestellt werden muß, damit sich die Bildweite des entstehenden Bildes um weniger als $p\%$ von der Brennweite f unterscheidet.
173. Eine Glaskugel hat den Krümmungsradius r. In welcher (mit r als Einheit ausgedrückten) Entfernung muß ein Gegenstand vor der Kugelfläche aufgestellt werden, damit das hinter der Kugelfläche entworfene Bild in gleicher Entfernung wie der Gegenstand erscheint?
174. Eine dicke bikonvexe Glaslinse hat die Krümmungsradien $r_1 = r_2 = 10$ cm und die Dicke $d = 5$ cm. Berechnen Sie die Brennweite dieser Linse und die Lage ihrer Hauptebenen. Ermitteln Sie des weiteren die Bildweite für den Fall, daß die Gegenstandsweite $g = 20$ cm beträgt.
175. Ein Gegenstand wird durch eine 2 cm vom Auge entfernt gehaltene Lupe betrachtet. Berechnen Sie die Brennweite der Lupe, wenn bei sechsfacher Vergrößerung die Bildweite den Wert $b = 30$ cm annimmt.
176. Eine Lupe hat die Brechkraft $D = 10$ dpt. Berechnen Sie, in welchem Abstand von der Lupe ein Gegenstand anzubringen ist, damit ein Beobachter, der die Lupe dicht vors Auge hält, ein scharfes Bild erblickt. Für den Beobachter hat die deutliche Sehweite den Wert $l = 25$ cm. Welche Vergrößerung hat die Lupe?
177. Berechnen Sie die mit einem Mikroskop erreichbare Vergrößerung, dessen Objektiv 0,5 cm, dessen Okular 2,0 cm Brennweite hat und dessen Tubuslänge 12 cm beträgt.
178. Zwei Sammellinsen mit den Brennweiten 3 cm bzw. 4 cm sind, als optisches System vereinigt, in 15 cm Abstand hintereinander befestigt. Berechnen Sie, in welchem Abstand vor der ersten, als Objektiv wirkenden Linse man einen Gegenstand aufstellen muß, damit das System vom Gegenstand ein virtuelles Bild entwirft, das sich in der deutlichen Sehweite befindet. Das Auge des Beobachters sei dicht an die zweite, als Okular wirkende Linse gerückt.
179. Ein KEPLERsches Fernrohr besteht aus einem Objektiv mit der Brennweite $f_1 = 42$ cm und einem Okular mit der Brennweite $f_2 = 1{,}4$ cm. Wie lang ist das Fernrohr, und welche Winkelvergrößerung erlaubt es?
180. Das Objektiv eines GALILEIschen Fernrohrs besteht aus einer dünnen Bikonvexlinse mit den Krümmungsradien $r_1 = r_2 = 24$ cm und der Brechzahl $n = 1{,}5$. Die Brechkraft des Okulars hat den Wert $D = -20$ dpt. Berechnen Sie, in welchen Abstand vom Objektiv man das Okular bringen muß, damit ein Beobachter mit der deutlichen Sehweite $l = 25$ cm einen Gegenstand scharf sieht, der 30 m vor dem Objektiv steht.
181. Ein Mikroprojektor, dessen Objektiv eine Brennweite $f_1 = 3$ cm, dessen Okular eine Brennweite $f_2 = 6{,}5$ cm hat und dessen Baulänge $d = 28$ cm beträgt, soll auf einer Mattscheibe das scharfe Bild eines Gegenstands entwerfen, der in der Gegenstandsweite $g = 3{,}6$ cm vor dem Objektiv steht. Berechnen Sie, in welchem Abstand vom Okular die Mattscheibe angebracht sein muß und welchen Wert die Vergrößerung annimmt.
182. Berechnen Sie den kleinsten Abstand zwischen zwei Strichen, die durch ein Mikroskop noch getrennt wahrgenommen werden sollen, wenn im blauen Licht der Wellenlänge $\lambda = 450$ nm beobachtet wird und die numerische Apertur des Objektivs den Wert $A = 0{,}55$ hat. Ermitteln Sie weiter, um wievielmal kleiner diese Entfernung ist als die, die

ein unbewaffnetes Auge in der deutlichen Sehweite $l = 25$ cm gerade noch trennen kann, wenn wir berücksichtigen, daß der kleinste Auflösungswinkel des unbewaffneten Auges den Wert $\alpha = 1'$ hat.

183. Die Brechzahl des Glases, aus dem eine Sammellinse hergestellt ist, hat für rotes Licht den Wert $n_{rot} = 1{,}51$ und für violettes den Wert $n_{viol} = 1{,}531$. Wie weit fallen die Brennpunkte für rote und violette achsenparallele Strahlen auseinander, wenn die Krümmungsradien der Linse $r_1 = r_2 = 15$ cm sind?

2.3. Wellenoptik

Wenn zwei mechanische Wellen, die von verschiedenen Quellen ausgehen, sich in irgendeinem Bereich überlagern, so kommt es in diesem Bereich zur **Interferenz.** Die resultierende Wellenamplitude ist dann gleich der Vektorsumme der Amplituden der beteiligten Teilwellen. Wenn aber die Quellen, von denen die Wellen ausgehen, mit der gleichen Frequenz schwingen und gleiche Schwingungsrichtung sowie gleiche, konstante Phasendifferenz haben, so handelt es sich dann um sog. **kohärente Quellen.** Die Amplitude der resultierenden Schwingung ist dann in jedem Punkt des betreffenden Mediums völlig bestimmt und hängt nur von den Abständen des Punktes von den beiden Quellen ab.

Eine Maximalamplitude bildet sich in all den Punkten aus, in denen für die Wegdifferenz der Wellen, $d_2 - d_1$, die Beziehung

$$d_2 - d_1 = k\lambda$$

erfüllt ist. Eine Minimalamplitude entsteht überall da, wo für die Wegdifferenz gilt

$$d_2 - d_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

(λ Wellenlänge, d_1 bzw. d_2 Abstände des angenommenen Punktes von den beiden Quellen).

Auch bei elektromagnetischen Wellen kann Interferenz eintreten, wenn die Wellen kohärent sind und Überlagerungen entsprechend den vorgenannten Bedingungen auftreten.

Der Abstand Δs zwischen zwei benachbarten Maxima der Beleuchtungsstärke auf einem Schirm, der von zwei kohärenten Lichtquellen beleuchtet wird, die sich vom Schirm im Abstand l und voneinander im Abstand a (mit $a \ll l$) befinden, genügt folgender Beziehung:

$$\Delta s = \lambda \frac{l}{a},$$

wobei λ die Wellenlänge des verwendeten monochromatischen Lichtes bedeutet.

Interferenz von Lichtstrahlen kann man auch auf einer dünnen, durchsichtigen Schicht beobachten. Wenn die dünne Schicht mit einem parallelen Bündel monochromatischen Lichtes der Wellenlänge λ bestrahlt wird, dann wird das Licht von der Schicht mit maximaler Intensität reflektiert, wenn die Bedingung

$$2nd \cos \beta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$$

erfüllt ist. Dagegen wird das Licht mit minimaler Intensität reflektiert, wenn gilt

$$2nd \cos \beta = k\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

(n Brechzahl der reflektierenden Schicht, d ihre Dicke, β Winkel, unter dem die Lichtwelle in die Schicht hinein gebrochen wird).
Die Tatsache, daß Licht sich nicht immer nur geradlinig ausbreitet, sondern durch Beugung Richtungsänderungen erfährt, wird durch verschiedene Experimente bestätigt, so z. B. die **Beugung am Spalt** und die **Beugung am optischen Gitter.** Stellen wir uns vor, daß auf einen engen Spalt in einem sonst undurchsichtigen Hindernis oder auf ein optisches Gitter ein monochromatisches Bündel paralleler Strahlen senkrecht einfällt. Es tritt Beugung auf, und an einem geeignet angeordneten Schirm können die Interferenzen beobachtet werden.
Bei Beugung des Lichtes am Spalt werden die durch die Gleichung

$$d \sin \alpha = k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

bestimmten Richtungen dadurch ausgezeichnet, daß in ihnen kein Licht ausgebreitet wird. Auf dem Schirm entspricht das der Beleuchtungsstärke Null. d ist hier die Spaltbreite.
Bei der Beugung des Lichtes am Gitter entstehen auf einem Schirm Maxima der Beleuchtungsstärken in all den Punkten, die den Richtungen entsprechen, die durch die Gleichung

$$d \sin \alpha = k\lambda$$

bestimmt werden, wobei d die **Gitterkonstante** ist. Sie ist gleich dem Abstand der Mittelpunkte zweier benachbarter Striche des Gitters. Der Zahlenwert k kann nur ganzzahlige positive Werte annehmen und bezeichnet die Ordnung des zugehörigen relativen Maximums.
Für die Untersuchung von Beugungserscheinungen an Röntgenstrahlen sind *räumliche Kristallgitter* geeignet. Wenn auf die ebene Oberfläche eines Kristalls ein paralleles Bündel von Röntgenstrahlen einfällt, so wird das Röntgenlicht dann mit maximaler Intensität reflektiert, wenn für seinen Einfallswinkel α die **Bragg-Wulfsche**

Bedingung

$$2d \sin \alpha = k\lambda$$

erfüllt ist. Der Winkel α wird von der Kristallebene aus gemessen, d ist die Gitterkonstante des Kristallgitters, der Zahlenwert k stellt wieder die Ordnung des zugehörigen relativen Maximums dar.

Wenn ein Lichtstrahl auf die Trennfläche zweier verschiedener Stoffe mit den absoluten Brechzahlen n_1 und n_2 unter einem Winkel α einfällt, welcher der Gleichung

$$\tan \alpha = \frac{n_2}{n_1} \tag{1}$$

genügt, so wird er **vollständig polarisiert** reflektiert, wobei seine Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammenfällt. Der Strahl, der in das zweite Medium eindringt, ist in der zur Einfallsebene senkrechten Ebene **teilweise polarisiert** und schließt mit dem reflektierten Strahl einen Winkel von 90° ein. Die Gl. (1) drückt das **Brewstersche Gesetz** aus.

B Beispiele

127. Aus einer Lichtquelle, die vor der Schnittlinie zweier FRESNELscher Spiegel im Abstand $r = 10$ cm aufgestellt ist, fällt monochromatisches Licht der Wellenlänge $\lambda = 0{,}6\,\mu$m auf die beiden Spiegel S_1 und S_2 (Bild 102). Das von den beiden Spiegeln reflektierte Licht erzeugt auf einem Schirm, der im Abstand $l_0 = 270$ cm von der Schnittlinie entfernt steht, ein Interferenzbild. In ihm ist der Abstand zweier benachbarter Streifen $\Delta s = 0{,}29$ cm. Berechnen Sie, welchen Winkel die beiden FRESNELschen Spiegel zwischen sich einschließen.

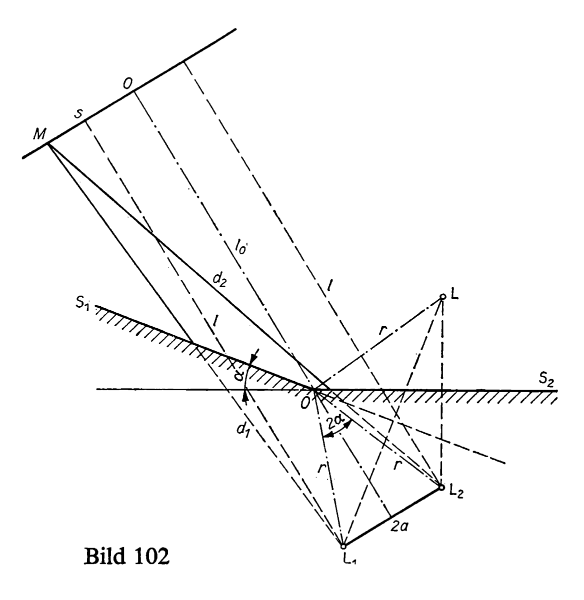


Bild 102

Lösung

Das von der Lichtquelle L ausgehende Licht wird auf den Spiegeln S_1 und S_2 reflektiert, und die scheinbar von zwei virtuellen Strahlenquellen L_1 und L_2 ausgehenden Strahlen interferieren miteinander. Das Interferenzbild, das auf dem Schirm entsteht,

der von den beiden virtuellen Quellen den Abstand l hat, ist von der Weglängendifferenz abhängig, die zwischen den beiden Strahlen besteht. Zum Beispiel entsteht im Punkt M des Schirms ein relatives Maximum dann, wenn die Weglängendifferenz

$$d_2 - d_1 = k\lambda \tag{1}$$

ist, wobei λ die Wellenlänge des verwendeten Lichtes ist und $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.
Die Lage der beiden virtuellen Lichtquellen L_1 und L_2 finden wir ohne Mühe aus den bekannten Eigenschaften des Planspiegels. Wenn wir ihren gegenseitigen Abstand mit $2a$ und den Abstand des Punktes M vom Mittelpunkt O des Schirmes mit s kennzeichnen, wie in Bild 102 vorgesehen, dann gilt offenbar

$$d_1^2 = l^2 + (s - a)^2, \quad d_2^2 = l^2 + (s + a)^2, \quad d_2^2 - d_1^2 = 4sa. \tag{2}$$

Da die Abstände s und $2a$ gegenüber den Abständen d_1 und d_2 klein sind, kann die Beziehung

$$d_1 + d_2 \approx 2l$$

als annähernd erfüllt gelten. Nach Einsetzen in Gl. (2) erhalten wir

$$d_2 - d_1 = \frac{2sa}{l}.$$

Nach Gl. (1) soll im Punkt M ein relatives Maximum sein, wenn

$$\frac{2sa}{l} = k\lambda \tag{3}$$

ist. Für den Abstand zweier benachbarter relativer Maxima Δs resultiert daraus

$$\Delta s = s_k - s_{k-1} = \frac{l\lambda}{2a}. \tag{4}$$

Aus Bild 102 können wir ohne weiteres ermitteln, daß $\sphericalangle\, S_1OS_2$ gleich dem doppelten Winkel ist, den die beiden FRESNELschen Spiegel einschließen. Durch eine Drehung des Spiegels S_1 um den Winkel α würde sich der auf ihm reflektierte Strahl um den Winkel 2α drehen, und das Bild der virtuellen Lichtquelle L_1 würde sich nach L_2 verschieben; deshalb können wir auch schreiben:

$$2a = 2r \sin \alpha, \quad l = l_0 + r \cos \alpha$$

und wegen der Kleinheit des Winkels α auch

$$a \approx r\alpha, \quad \text{bzw.} \quad l \approx l_0 + r.$$

Nach Einsetzen in Gl. (4) finden wir

$$\Delta s = \frac{l_0 + r}{2r\alpha} \lambda,$$

woraus für den gesuchten Winkel, den die beiden FRESNELschen Spiegel einschließen, resultiert:

$$\alpha = \frac{l_0 + r}{2\Delta s r} \lambda.$$

Die Berechnung mit den gegebenen Werten ergibt schließlich

$$\alpha = \frac{270\,\text{cm} + 10\,\text{cm}}{2 \cdot 0{,}29\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm}}\, 0{,}6 \cdot 10^{-4}\,\text{cm} = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{rad} = \underline{10'}.$$

128. Eine ebene Seifenwassermembran erscheint bei Beobachtung im reflektierten Licht von klar grüner Färbung. Das Auge beobachtet die Membran unter einem (gegen die Normale gemessenen) Winkel $\alpha = 35°$. Berechnen Sie die Dicke der Membran und in welcher Farbe sie erscheinen muß, wenn das Auge senkrecht auf die Membran blickt ($\alpha = 0°$). Die Seifenwassermembran hat die Brechzahl $n = 1{,}33$, und die Wellenlänge des grünen Lichtes ist $\lambda_{gr} = 500$ nm.

Lösung

Eine dünne Schicht reflektiert monochromatisches Licht dann am intensivsten, wenn die Gleichung

$$2nd \cos \beta = (2k + 1)\, \frac{\lambda}{2} \tag{1}$$

erfüllt ist, wobei β den zugehörigen Brechungswinkel des Lichtstrahls darstellt. Wenn wir in diese Beziehung den Einfallswinkel mit aufnehmen, erhalten wir entsprechend dem Brechungsgesetz

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

woraus folgt

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n}.$$

Das ermöglicht die Formulierung der Beziehung

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (2k + 1)\, \frac{\lambda}{2}.$$

Wenn die dünne reflektierende Schicht mit weißem Licht bestrahlt wird, so verstärken sich im reflektierten Licht diejenigen Farben am meisten, für welche Gl. (1) erfüllt ist. In unserem Falle ist die intensivste Farbe das Grün mit der Wellenlänge λ_{gr}. Für die Dicke der reflektierenden Schicht erhalten wir folgende Beziehung:

$$d = \frac{(2k + 1)\, \lambda_{gr}}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}. \tag{2}$$

Da die Zahl k beliebige ganze, positive Werte annehmen kann, läßt sich die Dicke d so noch nicht eindeutig bestimmen. Für die kleinstmögliche Dicke aber gilt sicher $k = 0$. Nach Einsetzen der gegebenen Werte erhalten wir damit

$$\underline{d = 104{,}1\,\text{nm}.}$$

Wenn die reflektierten Strahlen unter dem Winkel $\alpha = 0°$ einfallen, dann gilt nach Gl. (2)

$$2nd = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$$

und für $k = 0$

$$\lambda = 4nd = \underline{554 \text{ nm}}.$$

Diese Wellenlänge entspricht einer gelbgrünen Farbe.

129. Zwei sorgfältig geschliffene, ebene Plättchen sind so aufeinandergelegt, daß sie sich an einem Ende mit ihren Kanten berühren, während am anderen Ende, in einem Abstand von $a = 10$ cm von der Berührungslinie, ein Stückchen Metallfolie der Dicke $h = {}^1/_{50}$ mm zwischen sie geschoben ist (Bild 103; a: Grundlinie). Bestimmen Sie den Abstand von zwei nebeneinanderliegenden Interferenzstreifen, die entstehen, wenn auf die Anordnung monochromatisches Licht der Wellenlänge $\lambda = 589$ nm einfällt, a) bei senkrechtem Einfall und b) unter einem Winkel $\alpha = 60°$ (gegen die Normale gemessen).

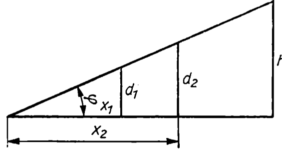


Bild 103

Lösung

Im Prinzip handelt es sich hierbei um die Brechung in einer dünnen Schicht, deren Dicke sich von Ort zu Ort ändert. In unserem Fall wird die dünne Schicht durch die zwischen den beiden Plättchen eingeschlossene Luftschicht gebildet.
Wenn die Luftschicht vollkommen planparallel wäre, dann würde sie diejenige Strahlung maximal reflektieren, für die gilt

$$2nd\cos\beta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$$

bzw. nach Einführen des Einfallswinkels (vgl. Beispiel 128)

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Da es sich hier um eine Luftschicht handelt, können wir $n \approx 1$ setzen und erhalten

$$2d\cos\alpha = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Die Dicke der Schicht möge an den Stellen, an denen zwei benachbarte helle Interferenzstreifen auftreten, mit d_1 bzw. d_2 angegeben sein; dann sind offenbar folgende Beziehungen erfüllt:

$$2d_1\cos\alpha = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad 2d_2\cos\alpha = (2k + 3)\frac{\lambda}{2}. \tag{1}$$

Weiterhin ist in Bild 103

$$d_1 = x_1\tan\varphi \quad d_2 = x_2\tan\varphi, \tag{2}$$

wobei

$$\tan\varphi = \frac{h}{a} \qquad (3)$$

ist. Für den Abstand zweier benachbarter Streifen ergibt sich aus den unter (2) stehenden Gleichungen

$$x_2 - x_1 = (d_2 - d_1)\cot\varphi.$$

Mit Hilfe der Beziehungen (1) und (3) erhalten wir die Differenz

$$x_2 - x_1 = \frac{a}{h}\,\frac{\lambda}{2\cos\alpha}\,.$$

Mit den gegebenen Größen wird für den Fall

a) $\alpha = 0$

$$x_2 - x_1 = \frac{a}{h}\,\frac{\lambda}{2} = \frac{10\,\text{cm}}{2\cdot 10^{-3}\,\text{cm}}\;\frac{589\cdot 10^{-7}\,\text{cm}}{2} = \underline{0{,}147\,\text{cm}};$$

b) $\alpha = 60°$

$$x_2 - x_1 = \frac{a}{h}\,\frac{\lambda}{2\cos 60°} = \underline{0{,}294\,\text{cm}}.$$

130. Auf eine ebene Glasplatte wird eine plankonvexe Linse mit dem Krümmungsradius r_1 gelegt, und zwar mit der konvexen Seite nach unten (Bild 104). Wenn auf dieses System senkrecht ein Bündel monochromatischer Lichtstrahlen einfällt, so entsteht auf der Glasplatte eine Interferenzerscheinung in Form konzentrischer Kreisringe, die abwechselnd dunkel und hell sind, die sog. NEWTON*schen Ringe*. Erläutern Sie die Entstehungsursache dieser Erscheinung, und bestimmen Sie die Radien derjenigen Kreise, die jeweils maximale Helligkeit aufweisen.

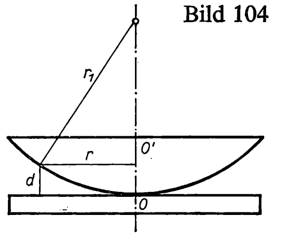


Bild 104

Lösung

Zwischen der Linse und der Glasplatte befindet sich eine dünne Luftschicht, deren Dicke sich vom Zentrum, dem Berührungspunkt von Linse und Platte, zum Rande hin vergrößert. Die Luftschicht hat an all jenen Stellen dieselbe Dicke, die gleich weit von der optischen Achse OO' (die durch den Berührungspunkt geht) entfernt sind. Wir wollen diesen Abstand mit r bezeichnen. Die Interferenzerscheinung kommt dadurch zustande, daß die an der unteren Trennfläche von Luft und Glas reflektierten Lichtstrahlen mit den von der oberen Trennfläche reflektierten interferieren.

An einer dünnen Schicht, die überall dieselbe Dicke d hat, entstehen Maxima der Beleuchtungsstärke, wenn die Bedingung

$$2nd\cos\beta = (2k + 1)\,\frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

erfüllt ist. Wenn wir berücksichtigen, daß im vorliegenden Fall die Lichtstrahlen senkrecht einfallen und daß sich die Reflexion in einer Luftschicht abspielt, ist $\beta = 0$ und $n \approx 1$, und Gl. (1) nimmt damit eine einfachere Form an, nämlich

$$2d = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}. \tag{2}$$

Nach Bild 104 gilt offensichtlich

$$d = r_1 - \sqrt{r_1^2 - r^2}\,.$$

Wenn wir das zweite Glied in dem vorstehenden Ausdruck entsprechend der binomischen Entwicklung behandeln und die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen (unter der Voraussetzung, daß $r_1 \gg r$ ist), erhalten wir

$$d \approx r_1 - \left(r_1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1}\right) = \frac{r^2}{2r_1}\,,$$

und unter Berücksichtigung der Gl. (2) wird

$$2\frac{r^2}{2r_1} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}\,,$$

woraus sich ergibt:

$$\underline{r = \sqrt{r_1(2k + 1)\frac{\lambda}{2}}} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{3}$$

Demnach liegen die Maxima der Beleuchtungsstärken auf Kreislinien, deren Radien Gl. (3) erfüllt.

131. Wenn auf einen optischen Spalt ein paralleles Strahlenbündel blauen Lichtes der Wellenlänge $\lambda_{bl} = 450$ nm senkrecht einfällt, so entsteht auf einem genügend weit entfernten Schirm ein Interferenzbild, bei dem die Mitte des zweiten dunklen Streifens um einen Winkel $\alpha_{bl} = 5° 14'$ gegenüber der kürzesten Verbindungsgeraden Spalt – Schirm abweicht. Unter welchem Winkel wird die Mitte des vierten Dunkelstreifens erscheinen, wenn der Spalt an Stelle des blauen mit rotem Licht der Wellenlänge $\lambda_r = 700$ nm beleuchtet wird?

Lösung

Ein Helligkeitsminimum zweiten Grades entsteht für den Fall des blauen Lichtes in all den Punkten des Schirmes, für welche die Bedingung

$$d \sin \alpha_{bl} = 2\lambda_{bl} \tag{1}$$

erfüllt ist. Für den Fall roten Lichtes lautet die Bedingung für ein Helligkeitsminimum vierten Grades

$$d \sin \alpha_r = 4\lambda_r. \tag{2}$$

Aus den Gln. (1) u. (2) erhalten wir durch Eliminieren von d

$$\sin \alpha_r = \frac{2\lambda_r}{\lambda_{bl}} \sin \alpha_{bl},$$

und durch Einsetzen der gegebenen Größen

$$\sin \alpha_r = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}}{4{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}} \sin 5^\circ\, 14',$$

d. h.,

$$\underline{\alpha_r = 16^\circ\, 29'.}$$

132. Auf ein optisches Strichgitter, das auf einem Millimeter 100 Striche hat, fällt ein paralleles Bündel weißen Lichtes senkrecht ein. Mit Hilfe einer dicht hinter dem Gitter angeordneten Sammellinse von 30 cm Brennweite wird auf einem geeignet angebrachten Schirm ein Spektrum erzeugt. Berechnen Sie, unter welchen gegenseitigen Abständen auf dem Schirm
a) die Farben Rot und Violett im Spektrum zweiter Ordnung,
b) das Ende des Spektrums erster und der Anfang des Spektrums zweiter Ordnung nebeneinander erscheinen. Die Wellenlänge an der roten Spektrumgrenze beträgt 760 nm und die an der violetten 400 nm.

Lösung

a) Die Beugungserscheinung wird in der Brennebene der Linse, im Abstand von $l = 30$ cm hinter dem Gitter, scharf dargestellt. Für die Ablenkung des roten Lichtes im Spektrum zweiter Ordnung gilt

$$\sin \alpha_r = 2 \frac{\lambda_r}{d},$$

und für die Ablenkung des violetten Lichtes entsprechend

$$\sin \alpha_v = 2 \frac{\lambda_v}{d}.$$

Da die Gitterkonstante den Wert $d = 10^{-3}$ cm hat, ergeben sich nach Einsetzen dieser Größe für die Ablenkung des roten bzw. violetten Lichtes im Spektrum zweiter Ordnung die Winkel

$$\alpha_r = 8^\circ\, 45', \quad \alpha_v = 4^\circ\, 35'.$$

Der Abstand der roten bzw. violetten Farbe vom Maximum nullter Ordnung ist

$$x_r = l \tan \alpha_r = 4{,}62\ \text{cm}$$

bzw.

$$x_v = l \tan \alpha_v = 2{,}40\ \text{cm}.$$

Ihr Abstand voneinander beträgt

$$x = x_r - x_v = \underline{2{,}22\ \text{cm}.}$$

b) Die Ablenkung des roten Lichtes im Spektrum erster Ordnung wird aus der Gleichung

$$\sin \alpha_r' = \frac{\lambda_r}{d}$$

bestimmt. Nach Einsetzen der gegebenen Größen ergibt sich

$$\alpha_r' = 4^\circ\, 22'.$$

Für den Abstand des roten Lichtes vom Maximum nullter Ordnung erhalten wir

$$x_r' = l \tan \alpha_r' = 2{,}30 \text{ cm}.$$

Der Beginn des Spektrums zweiter Ordnung, der vom violetten Licht markiert wird, hat vom (roten) Ende des Spektrums erster Ordnung den Abstand

$$x' = x_v - x_r' = 2{,}40 \text{ cm} - 2{,}30 \text{ cm} = \underline{0{,}1 \text{ cm}}.$$

133. Ein optisches Beugungsgitter wird senkrecht durch ein paralleles Bündel weißen Lichtes beleuchtet. Untersuchen Sie, ob sich irgendeine Farbe aus dem Spektrum erster Ordnung mit irgendeiner Farbe des Spektrums zweiter Ordnung überdecken kann.

Lösung

Im Spektrum erster Ordnung möge eine Spektrallinie der Wellenlänge λ_1 unter einem Winkel α_1 erscheinen und im Spektrum zweiter Ordnung eine Spektrallinie der Wellenlänge λ_2 unter dem Winkel α_2. Offensichtlich sind dann die Beziehungen

$$d \sin \alpha_1 = \lambda_1 \quad \text{und} \quad d \sin \alpha_2 = 2\lambda_2$$

erfüllt, wobei d die Gitterkonstante bedeutet.
Wenn beide Spektrallinien einander überdecken sollen, müßte die Bedingung

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

erfüllt sein, was zu der weiteren Bedingung führt

$$\lambda_1 = 2\lambda_2.$$

Die durch das Auge wahrnehmbaren Farbkomponenten des weißen Lichtes haben Wellenlängen im Bereich von 400 nm bis 700 nm. Deshalb kann die vorstehende Bedingung nicht erfüllt werden.

134. Bestimmen Sie den höchsten Ordnungsgrad eines Spektrums, das bei Beugung von Licht der Wellenlänge λ durch ein Gitter mit der Gitterkonstanten d gerade noch entstehen kann.

Lösung

Die Maximalintensität k-ter Ordnung tritt in derjenigen Richtung auf, für die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\sin \alpha = k \frac{\lambda}{d}. \tag{1}$$

Da die Winkelfunktion sin α dem Wert 1 sehr nahekommt, muß auch die rechte Seite der Gl. (1) die Bedingung

$$k\frac{\lambda}{d} \leqq 1$$

erfüllen, woraus sich für die höchstmögliche Ordnung des Spektrums ergibt

$$\underline{k \leqq \frac{d}{\lambda}},$$

wobei k ganzzahlig sein muß.

135. Berechnen Sie die Gitterkonstante von α-Eisen. Diese Kristallform ist durch eine Dichte $\varrho = 7860\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ bestimmt, wobei das Eisen in einem kubisch-raumzentrierten Gitter vorliegt.

Lösung

In einem kubischen Kristallgitter entfallen auf jede Elementarzelle n Atome eines Elements; M sei die Masse eines Grammatoms dieses Elements und N die Zahl der Atome im Grammatom. Dann hat ein einzelnes Atom des Elements die Masse

$$m_0 = \frac{M}{N},$$

und auf eine Elementarzelle entfällt die Masse

$$m = n\frac{M}{N}. \tag{1}$$

Mit der Gitterkonstanten d und der Dichte ϱ ergibt sich die Masse einer Elementarzelle zu

$$m = d^3\varrho. \tag{2}$$

Durch Vergleich der Gln. (1) u. (2) erhalten wir für die gesuchte Gitterkonstante den Ausdruck

$$d = \sqrt[3]{n\frac{M}{\varrho N}}. \tag{3}$$

In einem kubisch-raumzentrierten Gitter entfallen auf jede Elementarzelle $n = 2$ Atome, und für die Gitterkonstante ergibt sich schließlich

$$d = \sqrt[3]{\frac{2M}{N\varrho}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 55{,}8\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}}{6{,}03 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1} \cdot 7{,}86\,\text{g}\,\text{cm}^{-3}}} = \underline{2{,}87 \cdot 10^{-8}\,\text{cm}}.$$

136. Auf einen Kaliumchloridkristall fällt eine Röntgenstrahlung der Wellenlänge $\lambda = 0{,}1537$ nm (Kupfer-K_α-Strahlung) und wird gegenüber der (001)-Ebene unter einem Winkel $\alpha = 18°\,03'$ als Reflex zweiter Ordnung reflektiert. Wie groß ist die Gitterkonstante des KCl-Kristalls?

Lösung

Die auf die ebene Oberfläche des Kristalls auftreffende Röntgenstrahlung wird mit maximaler Intensität dann reflektiert, wenn die BRAGG-WULFsche Bedingung

$$2d \sin \alpha = k\lambda$$

erfüllt ist. Da das beobachtete reflektierte Strahlenbündel einen Reflex zweiter Ordnung darstellt, ist $k = 2$, und für die gesuchte Gitterkonstante ergibt sich der Wert

$$d = \frac{k\lambda}{2 \sin \alpha} = \frac{2 \cdot 1{,}537 \text{ Å}}{2 \sin 18° 03'} = \underline{0{,}496 \text{ nm}}.$$

137. Auf eine planparallele Glasplatte fällt ein Lichtstrahl unter einem solchen Winkel ein, daß der in die Luft reflektierte Strahl vollständig polarisiert ist. Beweisen Sie, daß auch der ins Glas hinein gebrochene und an der unteren Begrenzungsfläche ins Glas reflektierte Strahl vollständig polarisiert ist.

Lösung

Wenn die absoluten Brechzahlen von Luft bzw. Glas n_1 und n_2 sind, dann wird die Bedingung, daß der reflektierte Strahl (1) (Bild 105) vollständig polarisiert ist, durch die BREWSTERsche Beziehung ausgedrückt, also

$$\tan \alpha = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (1)$$

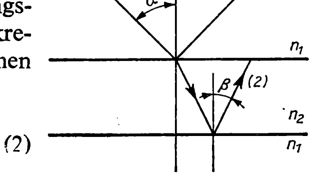


Bild 105

Um festzustellen, ob der an der unteren Begrenzungsfläche unter dem Brechungswinkel β ins Glas zurückreflektierte Strahl (2) vollständig polarisiert ist, untersuchen wir den Tangens des Brechungswinkels

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}. \qquad (2)$$

Gemäß dem Brechungsgesetz ist

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha.$$

Durch Vergleich mit Gl. (1), die auf die Form

$$\cos \alpha = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha$$

gebracht wird, erhalten wir

$$\sin \beta = \cos \alpha$$

und weiter

$$\cos \beta = \sin \alpha,$$

was nach Einsetzen in Gl. (2) ergibt:

$$\tan \beta = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Diese Beziehung drückt die Bedingung dafür aus, daß der an der Begrenzungsfläche Glas – Luft reflektierte Strahl vollständig polarisiert ist.

A Aufgaben

184. Bei dem Versuch von YOUNG treten die kohärenten, interferierenden Strahlen aus Spalten aus, deren Abstand 0,06 cm beträgt. Die auf dem 1 m dahinter stehenden Schirm erscheinenden Interferenzstreifen haben einen Abstand $\Delta l = 0{,}1$ cm. Wie groß ist die Wellenlänge des verwendeten Lichtes?
185. Zwei als kohärente Lichtquellen dienende Spalte haben voneinander einen Abstand von 0,045 cm. Im Abstand 0,5 m dahinter ist ein Schirm angebracht. Es wird weißes Licht verwendet. Berechnen Sie, in welchem Abstand vom zentralen Maximum die erste rote Aufhellung ($\lambda_1 = 700$ nm) und in welchem die erste blaue Aufhellung ($\lambda_2 = 400$ nm) auftritt.
186. Zwei FRESNELsche Spiegel, die den Winkel $\alpha = 9'10''$ einschließen, werden mit monochromatischem Licht der Wellenlänge $\lambda = 0{,}56$ µm beleuchtet. Der Abstand der Lichtquelle von der Schnittlinie beider Spiegel beträgt $s = 10$ cm, der Abstand des Schirmes $l_0 = 1$ m. Berechnen Sie den Abstand des dritten Intensitätsmaximums vom Zentrum des Interferenzbildes.
187. Eine Seifenwassermembran mit der Brechzahl $n = 4/3$ wird mit monochromatischem Licht der Wellenlänge $\lambda_0 = 540$ nm senkrecht beleuchtet. Wie dünn muß die Membran sein, damit im reflektierten Licht auf ihrer Oberfläche kein Interferenzmaximum auftritt?
188. Eine Glasmembran der Dicke $d = 0{,}3$ µm wird mit einem parallelen Bündel weißen Lichtes senkrecht beleuchtet. Bestimmen Sie die im sichtbaren Teil des Spektrums liegende Wellenlänge, die im reflektierten Licht a) am meisten verstärkt und b) am meisten geschwächt wird.
189. Zwischen zwei Glasplatten befindet sich eine Luftschicht von 1 µm Dicke, die mit weißem Licht senkrecht beleuchtet wird, wobei es zur Reflexion kommt. Bestimmen Sie die im sichtbaren Teil des Spektrums liegende Wellenlänge, die im reflektierten Licht a) am meisten verstärkt und b) am meisten geschwächt wird.
190. Eine sehr dünne, keilförmige Glasplatte wird mit monochromatischer Strahlung der Wellenlänge $\lambda = 0{,}5$ µm senkrecht beleuchtet. Die in der Keilplatte auftretende Interferenzerscheinung wird im reflektierten Licht beobachtet, wobei sich zeigt, daß der Abstand zweier benachbarter Dunkelstreifen 0,56 cm beträgt. Berechnen Sie den Winkel, den die beiden Oberflächen des Keils einschließen.
191. Der Zwischenraum einer optischen Anordnung zur Erzeugung NEWTONscher Ringe ist mit Wasser ausgefüllt. Die plankonvexe Linse hat einen Krümmungsradius $r = 1$ m, die Ringe erscheinen im reflektierten Licht der Wellenlänge $\lambda = 600$ nm, die Brechzahl des Wassers beträgt $n = 4/3$. Berechnen Sie den Abstand zwischen dem dritten und dem vierten NEWTONschen Ring.
192. Bei Beobachtung NEWTONscher Ringe

im reflektierten Licht der Wellenlänge $\lambda_{rot} = 700$ nm zeigt sich, daß der 5. Ring einen Durchmesser von 0,354 cm hat. Bestimmen Sie die Brennweite der verwendeten Plankonvexlinse. Wie groß wäre der Durchmesser des 5. Ringes bei Beobachtung im blauen Licht der Wellenlänge $\lambda_{bl} = 450$ nm?

193. NEWTONsche Ringe werden in einer Anordnung bei senkrecht einfallendem, einfarbigem, reflektiertem Licht beobachtet. Wie groß ist die Wellenlänge des verwendeten Lichtes, wenn der erste Dunkelring einen Durchmesser von 0,152 cm hat und der Krümmungsradius der verwendeten Plankonvexlinse 1 m beträgt?

194. Ein paralleles Bündel monochromatischen Lichtes der Wellenlänge $\lambda = 450$ nm fällt senkrecht auf einen 0,1 cm breiten Spalt. Dicht hinter dem Spalt befindet sich eine Linse mit $f = 100$ cm Brennweite, die auf einem in der Brennebene aufgestellten Schirm ein Beugungsbild entwirft. Bestimmen Sie den Abstand des ersten, zweiten und dritten Intensitätsminimums vom Maximum nullter Ordnung.

195. Auf einen Spalt von 0,05 cm Breite fällt ein monochromatisches Bündel paralleler Strahlung senkrecht ein und erzeugt auf einem 3,5 m hinter dem Spalt stehenden Schirm ein FRAUNHOFERsches Beugungsbild. Berechnen Sie die Wellenlänge des verwendeten Lichtes für den Fall, daß die Mitte des ersten Dunkelstreifens der Beugungsfigur von der Mitte des Spaltbildes einen Abstand von 0,42 cm hat.

196. Ein schmaler Spalt wird durch ein senkrecht einfallendes, paralleles Bündel weißen Lichtes beleuchtet. Ermitteln Sie, für welche Wellenlänge die Mitte des dritten Dunkelstreifens mit der Mitte des zweiten Dunkelstreifens einer anderen Wellenlänge zusammenfällt, wenn der zweite Dunkelstreifen einer roten Farbe der Wellenlänge $\lambda_{rot} = 690$ nm entspricht.

197. Auf ein Beugungsgitter mit 100 Strichen je Millimeter fällt ein paralleles Bündel roten Lichtes der Wellenlänge $\lambda_{rot} = 700$ nm senkrecht ein. Berechnen Sie den Abstand zwischen erster und dritter Aufhellung, wenn der Auffangschirm 1 m hinter dem Gitter aufgestellt wird.

198. Ein optisches Gitter mit 300 Strichen je Millimeter wird mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 700$ nm beleuchtet. Bestimmen Sie die höchste Ordnung des mit dieser Anlage erzielbaren Spektrums.

199. Auf ein optisches Gitter mit 310 Strichen je Millimeter fällt ein paralleles Bündel weißen Lichtes senkrecht ein. Auf einem Schirm wird ein farbiges Beugungsbild entworfen. Unter welchem Winkel erscheint dabei eine grüne Farbe von 540 nm Wellenlänge, die sich mit einer violetten Farbe von 405 nm Wellenlänge des Spektrums nächsthöherer Ordnung überlagert?

200. Auf die ebene Oberfläche eines NaCl-Kristalls fallen Röntgenstrahlen, die unter einem Winkel $\alpha = 5{,}9°$ (gemessen gegen die Oberfläche mit $k = 1$) reflektiert werden. Die Dichte des NaCl ist $\varrho = 2170 \text{ kg m}^{-3}$. Bestimmen Sie die Wellenlänge der einfallenden Röntgenstrahlung.

201. Berechnen Sie, unter welchem Winkel ein Lichtstrahl auf eine unter Wasser liegende Glasplatte auftreffen muß, damit der reflektierte Strahl vollständig polarisiert ist.

202. Auf eine Flintglasplatte fällt ein Lichtstrahl unter einem Winkel $\varphi = 56° 12'$ ein. Der reflektierte Strahl ist vollständig polarisiert. Wie groß ist die Brechzahl des Flintglases?

203. Berechnen Sie, unter welchem Winkel ein Lichtstrahl auf die Trennfläche von Glas und Wasser fallen muß, damit der ins Glas reflektierte Strahl vollständig polarisiert ist.

3. *Atomphysik*

3.1. Strahlung des schwarzen Körpers

Festkörper und Flüssigkeiten, die auf eine bestimmte Temperatur erhitzt werden, emittieren eine elektromagnetische Strahlung.

Unter der **Strahlstärke** I verstehen wir den Quotienten des vom Flächenelement $\mathrm{d}A$ in den gesamten Halbraum emittierten Strahlungsflusses $\mathrm{d}\Phi_e$ und dieser Fläche selbst, also

$$I = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}A}.$$

Von der Strahlstärke I entfällt auf das Wellenlängenintervall λ bis $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ der Anteil $\mathrm{d}I$. Der Ausdruck

$$L = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\lambda}$$

wird als die **Strahldichte** bezeichnet. Die Strahlstärke I kann man dann auch durch folgende Beziehung ausdrücken:

$$I = \int_0^\infty L \,\mathrm{d}\lambda.$$

Als **idealen schwarzen Körper** bezeichnen wir eine Substanz, die alle auf sie fallende Strahlung vollkommen absorbiert,

Entsprechend dem **Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetz** ist die Strahlstärke eines idealen schwarzen Körpers durch die Beziehung

$$I_e = \sigma T^4$$

gegeben, wobei T die absolute Temperatur des Körpers bedeutet. Die in der Gleichung auftretende Konstante σ hat den Wert

$$\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}\,K^{-4}}.$$

Entsprechend dem **Wienschen Verschiebungsgesetz** ist die Wellenlänge, bei der ein idealer schwarzer Körper sein (auf das Wellenlängenintervall bezogenes) Intensitätsmaximum hat, umgekehrt proportional zur Temperatur, nämlich

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}, \quad b = 0{,}00289\ \mathrm{m\,K}.$$

Die Strahldichte der monochromatischen Strahlung eines idealen schwarzen Körpers wird durch das **Plancksche Strahlungsgesetz** bestimmt. Es hat die Form

$$L_e = f(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}$$

$$\left(C_1 = 2\pi h c^2 = 1{,}19\,\pi \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J\,m^2\,s^{-1}}, \quad C_2 = \frac{hc}{k} = 0{,}0143\ \mathrm{m\,K}\right).$$

B Beispiele

138. Beweisen Sie, ausgehend vom PLANCKschen Strahlungsgesetz, die Gültigkeit a) des WIENschen Verschiebungsgesetzes und b) des STEFAN-BOLTZMANNschen Strahlungsgesetzes.

Lösung

a) Ableitung des WIENschen Verschiebungsgesetzes
Wir wollen den Wert λ_{max} für diejenige Wellenlänge aufsuchen, bei der die in der monochromatischen Strahlung eines schwarzen Körpers emittierte Energie, ausgedrückt durch das PLANCKsche Strahlungsgesetz, ein Maximum ist.
Dazu muß die Bedingung

$$\frac{dL_e}{d\lambda} = 0$$

erfüllt sein. Einsetzen des aus dem PLANCKschen Gesetz folgenden Ausdrucks führt auf

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{C_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}\right] = 0.$$

Indem wir die vorgegebene Ableitung ausführen, erhalten wir

$$C_1 \left(\frac{-5}{\lambda^6 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} + \frac{\frac{C_2}{T\lambda^2} e^{\frac{C_2}{\lambda T}}}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)^2} \right) = 0 .$$

Wir dividieren durch den Bruch $C_1/\lambda^6 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)$ und erhalten

$$5 = \frac{C_2 e^{\frac{C_2}{\lambda T}}}{\lambda T \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} .$$

Dieser Ausdruck wird durch die Substitution

$$\frac{C_2}{\lambda T} = x \tag{1}$$

in die einfache Form übergeführt:

$$\frac{x\, e^x}{e^x - 1} = 5 .$$

Durch eine Abschätzung können wir ermitteln, daß diese Gleichung eine reelle Wurzel hat, die annähernd gleich 5 ist. Durch Lösen der Gleichung mit Hilfe bekannter Methoden der Algebra ergibt sich, daß der Ausdruck nur eine reelle Wurzel hat, und zwar

$$x_1 = 4{,}965 .$$

Wenn wir diese Lösung in Gl. (1) einsetzen, erhalten wir für die gesuchte Wellenlänge die Aussage

$$\lambda_{max} = \frac{C_2}{xT} = \frac{hc}{4{,}965\, kT} = \frac{\text{const}}{T} ,$$

mit const = $\underline{0{,}00289 \text{ m K}}$.

b) Ableitung des STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetzes
Zunächst ermitteln wir den Wert der Strahlstärke I_e eines idealen schwarzen Körpers. Wenn die Strahldichte eines idealen schwarzen Körpers mit L_e angegeben ist, ist sicher auch

$$I_e = \int_0^\infty L_e \mathrm{d}\lambda .$$

Dieses Integral läßt sich leicht berechnen, wenn wir im PLANCKschen Strahlungsgesetz, das den Verlauf der Funktion L_e angibt, die Wellenlängen durch die Frequenzen ersetzen. Für die in einem Frequenzintervall ausgestrahlte Energie können wir die Beziehung

$$W \mathrm{d}\nu = L_e \, \mathrm{d}\lambda$$

angeben. Und wenn wir noch berücksichtigen, daß $\lambda = c\nu^{-1}$ und demnach $|d\lambda| = c\nu^{-2}\,|d\nu|$ ist, resultiert aus dem PLANCKschen Strahlungsgesetz die Folgerung

$$\frac{C_1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}}-1}\,d\lambda = \frac{C_1\nu^5}{c^5}\frac{1}{e^{\frac{C_2\nu}{cT}}-1}\,c\nu^{-2}\,d\nu,$$

und die gesamte Strahlstärke wird

$$I_e = \int_0^\infty L_e\,d\lambda = \int_0^\infty W\,d\nu = \int_0^\infty \frac{C_1}{c^4}\frac{\nu^3}{e^{\frac{C_2\nu}{cT}}-1}\,d\nu.$$

Die Substitution

$$\frac{C_2\nu}{cT} = x, \quad d\nu = \frac{cT}{C_2}\,dx$$

führt auf

$$I_e = \int_0^\infty \frac{C_1}{c^4}\frac{c^3T^3}{C_2^3}\frac{x^3}{e^x-1}\frac{cT}{C_2}\,dx.$$

Das uneigentliche Integral hat den Wert

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \frac{\pi^4}{15}.$$

Damit wird

$$I_e = \frac{C_1}{C_2^4}\,T^4\,\frac{\pi^4}{15}.$$

Nach Einsetzen der Werte für die Konstanten ergibt sich

$$I_e = \frac{2k^4\pi^5}{15c^2h^3}\,T^4 = \underline{\sigma T^4},$$

und das ist ein Ausdruck für das STEFAN-BOLTZMANNsche Gesetz. Die Konstante

$$\sigma = \frac{2k^4\pi^5}{15c^2h^3}$$

hat den Zahlenwert $\sigma = 5{,}7\cdot 10^{-8}\ \mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}\,K^{-4}}$.

139. Der von der Sonne kommende, auf die Erdoberfläche auftreffende Energiestrom überträgt auf einen Quadratzentimeter in der Minute etwa 1,94 cal. Berechnen Sie die Oberflächentemperatur der Sonne unter der Voraussetzung, daß sie wie ein idealer schwarzer Körper strahlt.

Lösung

Die Entfernung Sonne – Erde beträgt $d = 1{,}49 \cdot 10^8$ km, der Sonnenradius ist $r = 695\,550$ km. Wir sehen die Sonne als eine Kugel mit dem Radius r an und setzen voraus, daß die von der Oberflächeneinheit in der Zeiteinheit ausgehende Gesamtenergie W_e für alle Punkte der Sonnenoberfläche gleich ist. Demnach strahlt die gesamte Sonnenoberfläche in der Zeiteinheit die Energie

$$W_g = 4\pi r^2 W_e$$

aus. Diese von elektromagnetischen Wellen übertragene Energie ist auf einer kugelförmigen Wellenfläche verteilt. In Erdentfernung entfällt davon auf die Flächeneinheit der Anteil

$$W = \frac{W_g}{4\pi d^2} .$$

Hierbei bedeutet d den Abstand Sonne–Erde. Daraus finden wir

$$W_e = W \frac{d^2}{r^2} . \qquad (1)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Sonne wie ein idealer schwarzer Körper strahlt, können wir den Wert der Strahlstärke I mit Hilfe des STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetzes in der Form

$$I = \sigma T^4 \qquad (2)$$

ausdrücken. Durch Vergleich der Gln. (1) u. (2) ergibt sich

$$T = \sqrt[4]{\frac{I}{\sigma}} = \sqrt[4]{W \frac{d^2}{\sigma r^2}} = \sqrt{\frac{d}{r}} \sqrt[4]{\frac{W}{\sigma}} .$$

Durch Einsetzen der gegebenen Größen finden wir

$$T = \sqrt{\frac{1{,}495 \cdot 10^8 \text{ km}}{6{,}9555 \cdot 10^5 \text{ km}}} \sqrt[4]{\frac{\frac{1{,}94 \cdot 4{,}2}{60} \text{ J cm}^{-2} \text{ s}^{-1}}{5{,}7 \cdot 10^{-12} \text{ J cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}}} = \underline{5684 \text{ K}}.$$

140. Ein Metallfaden vom Durchmesser $d = 0{,}01$ cm befindet sich in einem evakuierten Kolben. Er soll durch einen elektrischen Strom auf die konstante Temperatur $T = 2500$ K erhitzt werden. Der Faden soll wie ein idealer schwarzer Körper strahlen; Wärmeleitungsverluste können vernachlässigt werden. Der spezifische Widerstand des verwendeten Drahtes ist $\varrho = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \Omega$ cm. Berechnen Sie die erforderliche Stromstärke.

Lösung

Wenn der Metallfaden wie ein idealer schwarzer Körper strahlt, dann geht von einem Quadratzentimeter seiner Oberfläche entsprechend dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz in der Sekunde die Gesamtenergie

$$W_e = \sigma T^4$$

aus. Die Energie, die der Faden mit der Oberfläche A während der Zeit t abstrahlt, ist dann

$$W_g = W_e A t = \sigma T^4 \pi l d t,$$

wobei l seine Länge bedeutet.
Damit der Metallfaden auf der konstanten Temperatur T gehalten werden kann, ist es notwendig, den durch Abstrahlung bewirkten Energieverlust durch diejenige Energie zu ersetzen, die beim Durchfluß des elektrischen Stromes frei wird. Wenn durch einen Leiter mit dem Widerstand R ein Strom der Stärke I_{el} fließt, so erhöht sich seine Energie in der Zeit t um den Betrag

$$\Delta W = R I_{el}^2 t,$$

was sich durch Temperaturerhöhung äußert. Wenn diese zugeführte Energie für die Deckung der abgestrahlten aufgewendet werden soll, muß die Bedingung erfüllt sein

$$R I_{el}^2 t = \sigma T^4 \pi l d t. \tag{1}$$

Wenn wir für den Widerstand eines Leiters der Länge l und des Querschnitts A die Formel

$$R = \varrho \frac{l}{A} = \varrho \frac{l}{\pi \frac{d^2}{4}}$$

einführen, dann läßt sich Gl. (1) umformen in

$$I_{el}^2 = \frac{\sigma T^4 \pi^2 d^3}{4\varrho},$$

$$I_{el} = \frac{\pi d T^2}{2} \sqrt{\frac{\sigma d}{\varrho}}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen ergibt sich

$$I_{el} = \frac{\pi \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} \cdot 2{,}5^2 \cdot 10^6\,\mathrm{K}^2}{2} \sqrt{\frac{5{,}7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-2}\,K^{-4}} \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}}{2{,}5 \cdot 10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m}}} = \underline{1{,}47\,\mathrm{A}}.$$

141. Ein Metallfaden mit dem Durchmesser $d = 0{,}02$ cm erwärmt sich unter der Wirkung eines elektrischen Stromes auf eine Temperatur $T_1 = 3000$ K. Der Faden soll wie ein idealer schwarzer Körper strahlen und von seiner Umgebung keinerlei weitere Energie aufnehmen. Er gibt seine Energie nur auf dem Wege der Strahlung ab. Berechnen Sie, welche Zeit vergeht, bis nach Abschalten des Stromes die Temperatur des Fadens auf den Wert $T_2 = 800$ K abgesunken ist. Die Dichte des Stoffes, aus dem der Faden besteht, ist $\varrho = 19000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, seine spezifische Wärmekapazität ist $c = 0{,}037\,\mathrm{kcal\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.

Lösung

Wenn der Faden wie ein idealer schwarzer Körper strahlt und aus seiner Umgebung keine Energie aufnimmt, so strahlt entsprechend dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz 1 cm² seiner Oberfläche in der Sekunde die Energie

$$W_e = \sigma T^4$$

ab, und der Faden mit der Gesamtoberfläche $A = \pi l d$ strahlt die Energie

$$W = \sigma \pi l d T^4 \tag{1}$$

ab. In der infinitesimalen Zeitspanne dt nimmt die Temperatur des Fadens vom Wert T auf $T - \mathrm{d}T$ ab, und der Faden emittiert die Energie

$$W\,\mathrm{d}t = -mc\,\mathrm{d}T \tag{2}$$

(m Masse, c spezifische Wärmekapazität des Fadens).
Wenn wir in Gl. (2) den aus Gl. (1) folgenden Ausdruck für die Energie einsetzen, erhalten wir

$$\frac{\sigma \pi l d}{mc}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}T}{T^4},$$

und durch Integration

$$\int_0^{t'} \frac{\sigma \pi l d}{mc}\,\mathrm{d}t = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T^4}$$

und nach Auflösung

$$t' = \frac{mc}{3\sigma \pi l d}\left(\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}\right).$$

Wenn wir hier noch die Masse m des Fadens ersetzen durch

$$m = V\varrho = \pi \frac{d^2}{4} l\varrho,$$

so erhalten wir

$$t' = \frac{d\varrho c}{12\sigma}\left[\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}\right]$$

Mit den gegebenen Größen ergibt sich für die gesuchte Zeit

$$t' = \frac{2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} \cdot 19 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 37 \cdot 4{,}18\,\mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}}{12 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J\,s^{-1}m^{-2}\,K^{-4}}}\left[\frac{1}{8^3 \cdot 10^6\,\mathrm{K}^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3^3 \cdot 10^9\,\mathrm{K}^3}\right] = \underline{1{,}65\,\mathrm{s}}.$$

142. Ein schwarzer Körper wird erhitzt a) auf eine Temperatur $T_a = 10^6$ K und b) $T_b = 10^3$ K. Berechnen Sie, auf welche Wellenlänge jeweils das Maximum der emittierten Strahlungsenergie entfällt.

Lösung

Entsprechend dem Wienschen Verschiebungsgesetz ist die Wellenlänge, bei der ein idealer schwarzer Körper maximal Energie abstrahlt, umgekehrt proportional der

absoluten Temperatur, also

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte ergibt das:

a) $$\lambda_{max} = \frac{0{,}00289 \text{ m K}}{10^6 \text{ K}} = 2{,}89 \cdot 10^{-9} \text{ m} = \underline{2{,}89 \text{ nm}}.$$

b) $$\lambda_{max} = \frac{0{,}00289 \text{ m K}}{10^3 \text{ K}} = \underline{2890 \text{ nm}}.$$

A Aufgaben

204. Ein Metallfaden von 0,02 cm Durchmesser und 10 cm Länge, der sich im Vakuum befindet und wie ein idealer schwarzer Körper strahlt, ist durch elektrischen Strom auf eine Temperatur von 3000 K erhitzt worden. Wie groß ist die in der Minute abgestrahlte Energie?
205. Der durchschnittlich von der Erdoberfläche abgestrahlte Energiestrom beträgt 0,13 cal cm^{-2} min^{-1}. Welche Temperatur müßte ein idealer schwarzer Körper haben, um die gleiche Energiemenge abstrahlen zu können?
206. In ein schwarzes, würfelförmiges Gefäß, dessen dünne Wände eine Temperatur nahe dem absoluten Nullpunkt haben, wird 1 kg Wasser von 50 °C gegossen, so daß das Würfelvolumen damit ausgefüllt ist. Berechnen Sie, in welcher Zeit sich das Wasser auf eine Temperatur von 10 °C abkühlt.
207. Von der Sonne wird ein maximaler Energiestrom bei der Wellenlänge $\lambda = 4{,}75 \cdot 10^{-5}$ cm des Sonnenspektrums abgestrahlt. Es sei angenommen, daß die Sonne wie ein idealer schwarzer Körper strahlt. Berechnen Sie die Oberflächentemperatur der Sonne.
208. Ein idealer schwarzer Körper hat eine Temperatur $T = 5000$ K. Berechnen Sie, wieviel mal so groß der auf die Wellenlänge $\lambda_1 = 580$ nm entfallende Energiestrom ist gegenüber dem auf die Wellenlänge $\lambda_2 = 760$ nm entfallenden.

3.2. Verhalten von Elementarteilchen

In einem elektrischen Feld der Feldstärke E wirkt auf ein Elektron eine Kraft, die gegeben ist durch

$$\vec{F} = -e\vec{E}.$$

In einem Magnetfeld der Induktion $\vec{B}$ wirkt auf ein mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegtes Elektron die Kraft

$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Wenn das Magnetfeld homogen und die Geschwindigkeit des Elektrons senkrecht zur Richtung der Induktion orientiert ist, nimmt die auf das Elektron wirkende Kraft einen konstanten Wert an:

$$F = evB.$$

Sie ist stets zum Krümmungsmittelpunkt der momentan durchlaufenen Bahn gerichtet. In diesem Falle bewegt sich das Elektron auf einer Kreisbahn, und die angegebene Kraft gewinnt die Bedeutung einer Zentripetalkraft.
Gemäß den Aussagen der speziellen Relativitätstheorie besteht zwischen der Masse m eines beliebigen materiellen Objekts (Körper, Teilchen, Feld) und seiner Energie E der Zusammenhang

$$E = mc^2,$$

wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bedeutet. Wenn sich die Energie eines Objekts ändert, verändert sich also auch seine Masse. Für den Fall der mechanischen Bewegung besteht eine Abhängigkeit der Masse m von der Geschwindigkeit v gemäß der Beziehung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

wobei m_0 die Ruhmasse des Körpers ist, d. h. seine Masse bei der Geschwindigkeit $v = 0$. Gemäß dieser Theorie beträgt die kinetische Energie eines Körpers

$$E_k = c^2(m - m_0) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Für den Impuls eines Teilchens mit der Geschwindigkeit v gilt in der relativistischen Mechanik

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Im Vergleich zur klassischen Physik bietet die spezielle Relativitätstheorie auch neue Einsichten in die Raum-Zeit-Eigenschaften von materiellen Objekten. Aus ihr muß auch die Folgerung der sog. **Zeitdilatation** gezogen werden. Wenn auf irgendeinem Körper, der sich in einem Bezugssystem in Ruhe befindet, ein Prozeß in der Zeitspanne t_0 abläuft, dann benötigt der gleiche Prozeß auf einem anderen Körper, der

sich gegenüber dem Bezugssystem mit der Geschwindigkeit v bewegt, eine andere Zeitspanne t, gegeben durch

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Das Lichtquant einer elektromagnetischen Strahlung der Wellenlänge λ und der Frequenz ν ist durch die Energie

$$W = h\nu$$

und den Impuls

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

gekennzeichnet, wobei h die **Plancksche Konstante,** das **Plancksche Wirkungsquantum,** darstellt.
Für die Geschwindigkeit der *Photoelektronen,* die von manchen Substanzen unter der Einwirkung von Licht bestimmter Frequenz emittiert werden (**äußerer lichtelektrischer Effekt**), gilt

$$h\nu = W_0 + W_A + \frac{1}{2} m v^2,$$

(W_0 *Ionisationsarbeit,* W_A *Ablösearbeit,* ν Frequenz des verwendeten Lichtes, h PLANCKsches Wirkungsquantum, m Masse eines Elektrons, v Geschwindigkeit, mit der es aus der betreffenden Substanz austritt).
Bei den Metallen ist W_0 sehr klein, so daß man $W_0 = 0$ setzen kann. Deshalb kann man die vorstehende Gleichung für Metalle in der Form schreiben:

$$h\nu = W_A + \frac{1}{2} mv^2.$$

Wenn sich Teilchen mit einer Geschwindigkeit v bewegen, können wir ihnen eine DE BROGLIE-Welle zuordnen, deren Wellenlänge λ durch die Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

gegeben ist (m Masse des Teilchens, h PLANCKsches Wirkungsquantum).

Unter **Ionisationspotential** eines bestimmten chemischen Elements verstehen wir dasjenige Potential, das, mit der Elementarladung multipliziert, die zur Ionisation eines Atoms des betreffenden Elements notwendige Arbeit angibt.
Wenn auf eine Substanz Röntgen- oder Gammastrahlen fallen, so tritt eine Streuung auf, und die gestreute Strahlung enthält neben der Komponente mit der Wellenlänge der Primärstrahlung auch Strahlungsanteile mit größerer Wellenlänge λ'. Entsprechend den Erkenntnissen von COMPTON handelt es sich bei diesem Streuprozeß um Wechselwirkungen von Lichtquanten und Elektronen, bei denen es zum Impulsaustausch kommt. Die Quanten der Röntgen- oder Gammastrahlung treffen auf freie oder schwach gebundene Elektronen und werden entsprechend den Gesetzen der klassischen Stoßmechanik reflektiert. Für die dabei auftretende Wellenlängenvergrößerung $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ gilt die Beziehung

$$\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

(Die Konstante λ_C, die COMPTON-Wellenlänge des Elektrons, wird mit $\lambda_C = h/m_0c = 2{,}426 \cdot 10^{-12}$ m angegeben, m_0 Ruhmasse des Elektrons, h PLANCKsches Wirkungsquantum, c Vakuumlichtgeschwindigkeit, ϑ Winkel, den der abgelenkte Strahl mit der Richtung des primären einschließt).
Wenn wir die Frequenz einer elektromagnetischen Strahlung in bezug auf zwei verschiedene Inertialsysteme S und S' angeben, wobei sich das System S' gegenüber dem System S mit der Geschwindigkeit v bewegt, dann gilt für die in den beiden Systemen auftretende Frequenz gemäß der DOPPLERschen Beziehung

$$\nu' \doteq \nu - \frac{v}{\lambda}$$

(λ Wellenlänge der angenommenen Strahlung, ν ihre Frequenz im System S, ν' Frequenz im System S').

B Beispiele

143. Unter dem Einfluß der Kräfte eines elektrostatischen Feldes, das durch eine negative Punktladung der Größe $Q = 10^{-10}$ C erregt wird, durchläuft ein Elektron eine Bahn, deren Anfangspunkt 5 cm und deren Endpunkt 10 cm von der angegebenen Punktladung entfernt ist. Welche Geschwindigkeit und welche kinetische Energie erreicht das Elektron auf dieser Bahn, wenn es im Anfangspunkt die Geschwindigkeit Null hatte?

Lösung

Aus dem Energiegesetz ergibt sich für den vorliegenden Fall, daß die Arbeit, welche die Kräfte eines elektrostatischen Feldes auf einer bestimmten Strecke verrichten, gleich der Zunahme der kinetischen Energie eben auf dieser Strecke sein muß, d. h.,

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-10}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}05} - \frac{1}{0{,}1}\right) \mathrm{J} \approx$$

$$\approx 9 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = \underline{9\ \mathrm{eV}},$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = \underline{1{,}78 \cdot 10^6\ \mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

144. In einem Katodenstrahloszillographen wird die Ablenkung der Elektronen durch ein homogenes elektrisches Feld bewirkt, das zwischen den Platten eines Kondensators besteht. In dieses Feld treten Elektronen mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 10^7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ senkrecht ein (Bild 106). Bestimmen Sie die auf dem Schirm sichtbare Ablenkung des Elektronenstrahls gegenüber seiner ursprünglichen Richtung, wenn die Spannung zwischen den Kondensatorplatten 100 V beträgt. Die Platten haben eine Länge von 3 cm, ihr Abstand ist 1 cm, und der Schirm befindet sich 30 cm hinter ihnen.

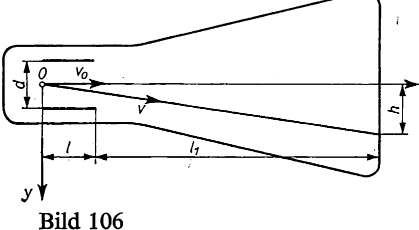


Bild 106

Lösung

Hierbei handelt es sich um die Bewegung von Elektronen in einem homogenen elektrischen Querfeld der Stärke

$$E = \frac{U}{d} \triangleq \frac{100\ \mathrm{V}}{1\ \mathrm{cm}} = 100\ \mathrm{V\,cm^{-1}}.$$

Unter Verwendung der Bezeichnungen in Bild 106 kann die Bewegung der Elektronen im Kondensatorfeld dargestellt werden durch

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0, \quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = eE.$$

Hieraus ergibt sich

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2.$$

Die in diesem Feld durchflogene Parabelbahn wird durch die Gleichung beschrieben:

$$y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{x^2}{v_0^2}.$$

An der Stelle, wo die Elektronen das Kondensatorfeld verlassen, ist $x = l$, und deshalb ergibt sich

$$y_l = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{l^2}{v_0^2}.$$

Für den Winkel φ, den an dieser Stelle die Richtung der Elektronengeschwindigkeit mit der x-Achse einschließt, gilt

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{eE}{m}t_l}{v_0} = \frac{\frac{eE}{m}\frac{l}{v_0}}{v_0} = \frac{eEl}{mv_0^2}.$$

In diesem Punkt ist die Tangente zur Parabelbahn durch die Gleichung

$$y - y_l = \tan\varphi\,(x - l)$$

gegeben. Aus ihr können wir die gesuchte Größe h berechnen. Für $x = l + l_1$ ergibt sich nämlich $y = h$, so daß gilt:

$$h = y_l + l_1\tan\varphi = \frac{eEl^2}{2mv_0^2} + \frac{eEll_1}{mv_0^2} = \frac{eEl}{mv_0^2}\left(\frac{l}{2} + l_1\right) =$$

$$= \frac{1{,}602\cdot 10^{-19}\cdot\frac{100}{10^{-2}}\cdot 3\cdot 10^{-2}}{9{,}109\cdot 10^{-31}\cdot 10^{14}}\cdot 0{,}315\ \text{m} = \underline{0{,}166\ \text{m}}.$$

145. Ein Elektron mit einer kinetischen Energie $W_k = 5\cdot 10^3$ eV bewegt sich in einem homogenen Magnetfeld der Induktion $B = 5$ mT so, daß Bewegungsrichtung und Induktionsrichtung senkrecht zueinander stehen. Wie groß ist der Radius der entstehenden Bahnkrümmung?

Lösung

Für die Bewegung eines langsamen Elektrons in einem homogenen Magnetfeld, dessen Induktionsrichtung senkrecht zur Bewegungsrichtung des Elektrons orientiert ist, gilt

$$m\frac{v^2}{r} = evB,$$

so daß wir für den gesuchten Krümmungsradius

$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2W_k}{m}}$$

erhalten. Hierin haben wir die Geschwindigkeit mit Hilfe der Beziehung $W_k = \frac{1}{2}mv^2$ ausgedrückt. Damit ist

$$r = \frac{9{,}109\cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 5\cdot 10\cdot 10^{-4}\ \text{Wb m}^{-2}}\sqrt{\frac{2\cdot 5\cdot 10^3\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{J}}{9{,}109\cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} =$$

$$= \underline{4{,}77\cdot 10^{-2}\ \text{m}}.$$

In diesem Lösungsgang wurde für die Masse m die Ruhmasse des Elektrons eingesetzt.

146. Ein Elektron fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 10^4 \text{ m s}^{-1}$ in ein homogenes Magnetfeld der Induktion $B = 0{,}01 \text{ Wb m}^{-2}$ so ein, daß seine Geschwindigkeitsrichtung mit der Richtung von B den Winkel $\varphi = 30°$ einschließt. Bestimmen Sie den Radius der Windung jener Spirale, auf der sich das Elektron nun bewegen wird, die Höhe einer Windung sowie die Zeitspanne, in der das Elektron in Richtung der Spiralachse eine Strecke $s = 1$ m zurückgelegt haben wird.

Lösung

Wir wollen die Geschwindigkeit v_0, mit der das Elektron in das Magnetfeld eintritt, in zwei Komponenten zerlegen; v_{01} in Richtung der Induktion B und v_{02} senkrecht dazu:

$$v_{01} = v_0 \cos\varphi, \quad v_{02} = v_0 \sin\varphi.$$

Die Bewegung des Elektrons erfolgt so, als ob sie aus zwei Bewegungskomponenten zusammengesetzt sei; einer gleichförmig geradlinigen Bewegung in Richtung der Induktion mit der Geschwindigkeit v_{01} (auf diese Bewegungskomponente hat das Magnetfeld keinerlei Einfluß) und einer Bewegung auf einer Kreisbahn in der zur Induktionsrichtung senkrechten Ebene mit der Geschwindigkeit v_{02}. Letztere Komponente der Elektronenbewegung ist genau derjenigen gleich, die in Beispiel 145 dargestellt wurde. Demzufolge wird sich die resultierende Bewegung des Elektrons auf einer Spirale vollziehen, deren Achse mit der Induktionsrichtung des gegebenen Magnetfeldes zusammenfällt. Für den Windungsradius r der resultierenden Spirale gilt ganz analog zu Bei spiel 145 die Bedingung

$$\frac{mv_{02}^2}{r} = eBv_{02}.$$

Daraus ergibt sich

$$r = \frac{mv_{02}}{eB} = \frac{mv_0 \sin\varphi}{eB} = \frac{9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-2}} \text{ m} = \underline{2{,}84 \cdot 10^{-6} \text{ m}}.$$

Die Zeit T, in der das Elektron einen Umlauf um die Spiralachse ausführt, ergibt sich aus der Beziehung

$$T = \frac{2\pi r}{v_{02}} = \frac{2\pi r}{v_0 \sin\varphi} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}84 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{10^4 \text{ m s}^{-1} \cdot \frac{1}{2}} = \underline{3{,}57 \cdot 10^{-9} \text{ s}}.$$

Für die Höhe einer einzelnen Windung gilt

$$h = v_{01} T = v_0 \cos\varphi\, T = 10^4 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3{,}57 \cdot 10^{-9} \text{ m} = \underline{3{,}09 \cdot 10^{-5} \text{ m}}.$$

Die Zeit t, in der das Elektron längs der Spiralachse eine Strecke $s = 1$ m zurücklegt, ist schließlich

$$t = \frac{s}{v_{01}} = \frac{1}{v_0 \cos\varphi} = \frac{1}{10^4 \frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ s} = \underline{0{,}115 \cdot 10^{-3}} \quad .$$

147. Ein Magnetron besteht aus einer Diode, deren Anode die Form eines Kreiszylinders hat, in dem koaxial der Katodenfaden liegt. Auf den Glaskolben dieser Diodenröhre wird eine Zylinderspule gewickelt, deren Achse mit der der Anode zusammenfällt. Die draußen aufgesetzte Spule ist lang genug, so daß das von ihr erzeugte Magnetfeld längs der Katode als homogen angesehen werden kann. Die vom Katodendraht emittierten Elektronen stehen unter gleichzeitigem Einfluß des elektrischen Feldes zwischen Katode und Anode und unter dem des Magnetfeldes, das von dem die Spulenwindungen durchfließenden elektrischen Strom erzeugt wird. Berechnen Sie den Mindestwert der Induktion B, der erreicht werden muß, um die Elektronen daran zu hindern, die Anode zu erreichen. Der Radius der Anode ist $r_A = 4$ cm, die Spannung zwischen den Elektroden der Diode beträgt $U = 1000$ V.

Lösung

Die Bewegungsgleichung eines Elektrons, das gleichzeitig dem Einfluß eines elektrischen und eines magnetischen Feldes unterliegt, hat die Form

$$m\vec{a} = \vec{F}_e + \vec{F}_m \tag{1}$$

($\vec{F}_e$ Kraft des elektrischen Feldes auf das Elektron, $\vec{F}_m$ Kraft des magnetischen Feldes). In Bild 107 ist der Sachverhalt in einem Schnitt dargestellt, der senkrecht zur koaxialen Anordnung gelegt wurde. Demnach ist

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}; \quad \vec{F}_m = -e(\vec{v} \times \vec{B}).$$

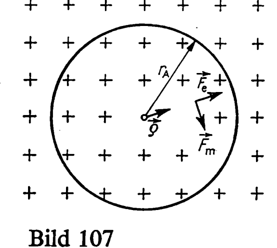


Bild 107

Aus dem Bild ist ersichtlich, daß $\vec{F}_e$ in jedem Augenblick eine radiale Richtung und $\vec{F}_m$ dagegen eine axiale Richtung hat. Deshalb zerlegen wir die Beschleunigung in eine radiale und eine axiale Komponente, so daß wir schreiben können:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{\varrho}) = \frac{dr}{dt}\vec{\varrho} + r\frac{d\vec{\varrho}}{dt},$$

so daß für die Beschleunigung folgt

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{\varrho} + r\frac{d^2\vec{\varrho}}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\vec{\varrho}}{dt},$$

($\vec{\varrho}$ Einheitsvektor, der von der Katode zur derzeitigen Momentanlage des Elektrons hin gerichtet ist). Ferner ist

$$\frac{d\vec{\varrho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\varrho} = \omega\vec{\tau}$$

($\vec{\omega}$ die momentane Winkelgeschwindigkeit des Elektrons, $\vec{\tau}$ Einheitsvektor in axialer Richtung). Damit wird dann

$$\frac{d^2\vec{\varrho}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\varrho}}{dt} =$$

$$= \vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) = \vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{\varrho}) - \omega^2\vec{\varrho} = \varepsilon\vec{\tau} - \omega^2\vec{\varrho},$$

denn die Vektoren $\vec{\omega}$ und $\vec{\varrho}$ stehen senkrecht aufeinander, so daß $\vec{\omega}\vec{\varrho} = 0$ ist. Für die Beschleunigung des Elektrons erhalten wir also

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right)\vec{\varrho} + \left(r\varepsilon + 2\frac{dr}{dt}\omega\right)\vec{\tau}.$$

Wenn wir weiterhin bedenken, daß

$$\vec{F}_m = -e(\vec{v} \times \vec{B}) = -e\left[\left(\frac{dr}{dt}\vec{\varrho} + r\omega\vec{\tau}\right) \times \vec{B}\right] = eB\frac{dr}{dt}\vec{\tau} + er\omega B\vec{\varrho}$$

ist, dann wird es möglich, aus Gl. (1) zwei weitere Beziehungen zu erhalten, nämlich

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right) = eE + er\omega B, \quad \text{und}$$

$$m\left(r\varepsilon + 2\frac{dr}{dt}\omega\right) = eB\frac{dr}{dt}.$$

Die zweite Beziehung können wir in eine andere Form bringen:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\omega) = eB\frac{dr}{dt},$$

woraus wir nach Multiplikation mit dt und Integration erhalten

$$mr^2\omega = \frac{1}{2}eBr^2,$$

so daß sich ergibt

$$\omega = \frac{eB}{2m}.$$

Im Grenzfall, wo die Stärke des Magnetfeldes dem Elektron gerade noch das Erreichen der Anode gestattet, tangiert die Elektronenbahn an die zylindrische Anode, und für den Wert $r = r_A$ wird $\frac{dr}{dt} = 0$. Die kinetische Energie des Elektrons erfüllt im Berührungspunkt die Bedingung

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr_A^2\omega^2 = eU.$$

Wenn wir für die Winkelgeschwindigkeit ω den angegebenen Ausdruck einsetzen, erhalten wir

$$\frac{1}{2}mr_A^2\left(\frac{eB}{2m}\right)^2 = eU, \quad \text{d. h.,} \quad \frac{1}{8}r_A^2\frac{eB^2}{m} = U.$$

Daraus können wir die gesuchte Größe B bestimmen zu

$$B = \sqrt{\frac{8mU}{er_A^2}} = \frac{2}{r_A}\sqrt{\frac{2mU}{e}} = \underline{0{,}53 \cdot 10^{-2}\ \text{Wb m}^{-2}}.$$

Sobald wir die Induktion des Magnetfeldes über diesen Wert hinaus erhöhen, können die von der Katode emittierten Elektronen die Anode nicht mehr erreichen.

148. Zwischen den Duanten eines Zyklotrons herrscht eine Spannung der Form $U = U_0 \sin \omega t$, wobei $U_0 = 2 \cdot 10^4$ V und die Frequenz $f = 2{,}25 \cdot 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$ beträgt. Im Zyklotron sollen einwertige Ionen beschleunigt werden, deren Masse etwa 1800mal so groß ist als die Ruhmasse des Elektrons. Die Anordnung ist in Bild 108 wiedergegeben. Das Ion beginne seine Bewegung im Punkt A des Bildes, und nachdem es eine gewisse Zahl aufeinanderfolgender Halbkreise durchlaufen hat, erreicht es die Geschwindigkeit $v_0 = 4{,}4 \cdot 10^7$ m s^{-1}. Ermitteln Sie die Zahl der notwendigerweise zu durchlaufenden Halbkreise sowie den Radius des ersten und des letzten Halbkreises unter der Voraussetzung, daß der Abstand zwischen den Duanten jeweils im Moment maximaler Spannung durchlaufen wird.

Bild 108

Lösung

Die Zeit, in der das Ion einen beliebigen Halbkreis durchläuft, ist immer gleich groß und also vom jeweiligen Bahnradius unabhängig. Sie muß stets einer halben Periodendauer der Wechselspannung entsprechen, also

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = \frac{1}{2 \cdot 2{,}25 \cdot 10^7\ \mathrm{s}^{-1}} = \frac{1}{4{,}5 \cdot 10^7}\ \mathrm{s} = 0{,}222 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}.$$

Für die Geschwindigkeit des Ions nach Absolvieren von n Halbkreisen erhalten wir denselben Wert, als ob das Ion in einem linearen elektrischen Feld mit der Potentialdifferenz $\Delta\varphi = nU_0$ beschleunigt worden wäre. Deshalb ist

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = QnU_0,$$

$$n = \frac{mv_0^2}{2QU_0} = \frac{1800 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 19{,}36 \cdot 10^{14}}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^4} = 557.$$

Der Radius der letzten durchlaufenen Halbkreisbahn ist

$$r_0 = \frac{v_0 \tau}{\pi} = \frac{4{,}4 \cdot 10^7 \cdot 0{,}222 \cdot 10^{-7}}{3{,}14}\ \mathrm{m} = 0{,}31\ \mathrm{m} = \underline{31\ \mathrm{cm}}.$$

Der Radius der ersten Bahn ist dementsprechend

$$r_1 = \frac{v_1 \tau}{\pi} = \tau \frac{\sqrt{\frac{2QU_0}{m}}}{\pi} = 0{,}014\ \mathrm{m} = \underline{1{,}4\ \mathrm{cm}}.$$

149. Bestimmen Sie Masse und Geschwindigkeit eines Elektrons, dessen kinetische Energie 200 keV beträgt.

Lösung

Die spezielle Relativitätstheorie liefert für die Masse eines beliebigen Körpers in Abhängigkeit von seiner Geschwindigkeit die Beziehung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(m_0 die Ruhmasse des betreffenden Körpers bei der Geschwindigkeit $v = 0$). Diese Beziehung können wir umformen in

$$\frac{m_0}{m} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

woraus wir für die kinetische Energie eines Körpers bei der Geschwindigkeit v die Beziehung erhalten

$$W_k = \frac{1}{2} mv^2 = (m - m_0)\, c^2.$$

Entsprechend der vorgegebenen Aufgabenstellung ist also

$$(m - m_0)\, c^2 = 2 \cdot 10^5 \text{ eV} = 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ J},$$

und demnach

$$m = m_0 + \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^8)^2} \text{ kg} = 9{,}109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} + 3{,}56 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \approx$$

$$\approx \underline{12{,}7 \cdot 10^{-31} \text{ kg.}}$$

Seine Geschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{12{,}7 \cdot 10^{-31}}} \text{ m s}^{-1} = \underline{2{,}25 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}.}$$

150. Welche Spannung müßte ein elektrostatisches Feld aufweisen, damit ein in ihm beschleunigtes Elektron gemäß den klassischen, d. h. vorrelativistischen Vorstellungen die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann? Welche Geschwindigkeit erreicht es relativistisch?

Lösung

Gemäß der klassischen Theorie können wir schreiben

$$eU = \frac{1}{2} m_0 v^2,$$

wobei m_0 die Ruhmasse des Elektrons bedeutet. Im Falle $v = c$ wird

$$eU = \frac{1}{2} m_0 c^2,$$

woraus sich für die Spannung ergibt

$$U = \frac{m_0 c^2}{2e} = \frac{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-2}}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}} \approx \underline{256\,\text{kV}.}$$

Entsprechend den Aussagen der relativistischen Mechanik können wir für die kinetische Energie eines Elektrons schreiben (vgl. auch Beispiel 149):

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = (m - m_0)\,c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Dann ist

$$eU = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = \frac{1}{2}\,m_0 c^2,$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3}{2},$$

und für die gesuchte Geschwindigkeit ergibt sich

$$v = \frac{\sqrt{5}}{3}\,c \approx \underline{0{,}75\,c.}$$

Bei dieser Geschwindigkeit nimmt die Masse des Elektrons den Wert

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3}{2}\,m_0 = 1{,}5\,m_0$$

an.
Demnach stieg die relativistische Masse des Elektrons gegenüber seiner Ruhmasse um 50% an.

151. Aus einer Silberfläche, die durch monochromatisches Licht der Wellenlänge $\lambda = 150\,\text{nm}$ beleuchtet wird, werden Photoelektronen ausgelöst. Wie groß ist ihre Geschwindigkeit, wenn wir voraussetzen, daß bei Silber der lichtelektrische Effekt erst unterhalb der Wellenlänge $\lambda_0 = 260\,\text{nm}$ einsetzt?

Lösung

Die Geschwindigkeit der Photoelektronen folgt der Beziehung

$$h\nu = W_A + \frac{1}{2}\,mv^2,$$

wobei $W_A = h\nu_0$ die Ablösearbeit des Elektrons aus dem betreffenden Metall bedeutet. Da

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{und} \quad \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$$

ist, können wir unter Berücksichtigung der gegebenen Aufgabe schreiben

$$h\frac{c}{\lambda_0} = W_A \quad (\text{für } \lambda = \lambda_0 \text{ gilt ja } v = 0).$$

$$h\frac{c}{\lambda} = W_A + \frac{1}{2}mv^2,$$

so daß sich ergibt

$$h\frac{c}{\lambda} = h\frac{c}{\lambda_0} + \frac{1}{2}mv^2.$$

Für die gesuchte Geschwindigkeit erhalten wir daraus

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\text{Js} \cdot 3 \cdot 10^8\,\text{m s}^{-1}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}}\left(\frac{1}{1500 \cdot 10^{-10}\,\text{m}} - \frac{1}{2600 \cdot 10^{-10}\,\text{m}}\right)} =$$

$$= \underline{1{,}109 \cdot 10^6\,\text{m s}^{-1}}.$$

152. Wie groß ist die Wellenlänge der DE BROGLIEschen Wellen, die einem Elektron zuzuordnen sind, dessen kinetische Energie 10^6 eV beträgt?

Lösung

Für die Wellenlänge dieser Wellen gilt die Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

(m Masse des Elektrons, v Geschwindigkeit, h PLANCKsches Wirkungsquantum). Da

$$\frac{1}{2}mv^2 = W_k$$

ist, können wir schreiben

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}},$$

und das ergibt

$$\lambda = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2W_k}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2mW_k}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 10^6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}} =$$

$$= 1{,}22 \cdot 10^{-12}\ \text{m} = \underline{1{,}22\ \text{pm}}.$$

Hierbei wurde mit der Ruhmasse des Elektrons gerechnet.

153. Ein Röntgenlichtquant, dem eine Wellenlänge $\lambda = 0{,}1$ nm zukommt, tritt in Wechselwirkung mit dem schwach gebundenen Elektron eines Atoms niederer Ordnungszahl und erleidet dabei eine Richtungsabweichung um den Winkel $\vartheta = 90°$. Berechnen Sie, welchen Energiebetrag das Elektron bei diesem Prozeß aufnimmt und in welcher Richtung es sich danach bewegen wird.

Lösung

Ein schwach gebundenes Elektron können wir als frei betrachten. Bei der Wechselwirkung des Photons mit dem Elektron geht ein Teil der Energie des Photons an das Elektron über, so daß das Photon mit verminderter Energie und (im allgemeinen) veränderter Richtung seinen Weg fortsetzt. Wir bezeichnen die Energie des Photons vor dem Prozeß der Wechselwirkung mit $W = h\nu$ und nach dem Prozeß mit $W' = h\nu'$. Dann gilt die Beziehung

$$h\nu' < h\nu$$

bzw.

$$\nu' < \nu.$$

Wir drücken die Frequenz gemäß der Beziehung $\nu = c/\lambda$ durch die Wellenlänge aus und finden

$$\lambda' > \lambda.$$

Demnach ist die Wellenlänge des aus der ursprünglichen Richtung abgelenkten Photons größer als die, die es vor der Wechselwirkung hatte. Aus der Theorie des COMPTON-Effekts ergibt sich die mit der Wechselwirkung verbundene Wellenlängenänderung zu

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_C \sin^2\frac{\vartheta}{2} \qquad (1)$$

mit der *Compton*-Wellenlänge

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c} = 2{,}426 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

(m_0 Ruhmasse des Elektrons).

Wenn wir diese Art der Wechselwirkung von Photon und Elektron unter dem Gesichtspunkt des elastischen mechanischen Stoßes behandeln, dann nimmt das Elektron bei der Wechselwirkung die Energie

$$W_e = W - W' = h(\nu - \nu') = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)$$

auf. Nach Umformung dieser Gleichung mit Hilfe von Gl. (1) erhalten wir für den vom Elektron aufgenommenen Energiebetrag die Aussage

$$W_e = \frac{hc}{\lambda} \frac{2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\lambda + 2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen ergibt das

$$W_e = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-10}} \frac{2 \cdot 2{,}426 \cdot 10^{-12} \sin^2 45°}{10^{-10} + 2 \cdot 2{,}426 \cdot 10^{-12} \sin^2 45°} \text{ J} =$$

$$= 4{,}8 \cdot 10^{-17} \text{ J} \approx \underline{300 \text{ eV}}.$$

Den Winkel φ, der angibt, wie weit das Elektron in seiner Bewegung gegenüber der ursprünglichen Bewegungsrichtung des Photons abweicht, können wir unter Hinzuziehung des Impulserhaltungssatzes bestimmen. Wir wenden diesen Satz auf das System Photon – Elektron an, indem wir den Impuls des von links einfallenden Photons mit p, den des abgelenkten Photons mit p' und den des Elektrons mit $p_e = mv$ bezeichnen. Danr gilt der Impulserhaltungssatz in der Form

$$p' + p_e = p.$$

In Bild 109 ist das Vektordiagramm der hierbei beteiligten Impulse dargestellt.
Der Impuls des Photons vor und nach der Wechselwirkung kann durch seine Absolutbeträge

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{und} \quad p' = \frac{h}{\lambda'}$$

dargestellt werden. Da der Impuls des Elektrons $p_e = mv$ ist, können wir auf das Impulsdreieck in Bild 109 den Sinussatz anwenden:

$$\frac{\sin [2\text{R} - (\varphi + \vartheta)]}{\sin \varphi} = \frac{\frac{h}{\lambda}}{\frac{h}{\lambda'}},$$

$$\frac{\sin (\varphi + \vartheta)}{\sin \varphi} = \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Bild 109

Mit Hilfe des Additionstheorems für $\sin (\varphi + \vartheta)$ ergibt sich

$$\cot \varphi = \frac{\lambda' - \lambda \cos \vartheta}{\lambda \sin \vartheta}.$$

Wir berücksichtigen ferner, daß $1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2 \vartheta/2$ und $\sin \vartheta = 2 \sin \vartheta/2 \cos \vartheta/2$ ist, und wenden diese Winkelbeziehungen auf Gl. (1) an. Dann erhalten wir nach Umformung

$$\cot \varphi = \frac{\tan \frac{\vartheta}{2} (\lambda + \lambda_C)}{\lambda}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen finden wir den Winkel

$$\underline{\varphi = 45°41'}.$$

154. Welche Wellenlänge muß ein Photon haben, das ein Zäsiumatom ionisieren soll, wenn das Ionisationspotential des Cs-Atoms mit $U_i = 3{,}88$ V angegeben ist?

Lösung

Für die Ionisierung des Cs-Atoms muß die Arbeit

$$W = eU_i = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{As} \cdot 3{,}88\ \text{V} = 6{,}216 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

verrichtet werden.
Ein Photon, das diese Ionisation bewirken soll, muß mindestens eine Energie haben, die der vorgenannten Arbeit entspricht. Deshalb muß gelten

$$h\nu = W.$$

Da $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$ und $\dfrac{hc}{\lambda} = W$ ist, wird

$$\lambda = \frac{hc}{W} = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{6{,}216 \cdot 10^{-19}}\ \text{m} = 3{,}196 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = \underline{319{,}6\ \text{nm}}.$$

155. Ein Elektron hat die Ruhmasse $m_0 = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg. Wie groß ist die dieser Masse entsprechende Ruhenergie des Elektrons?

Lösung

Der Zusammenhang zwischen Masse und Energie wird durch die EINSTEINsche Beziehung ausgedrückt:

$$E = mc^2.$$

Nach Einsetzen der Werte für die Größen erhalten wir

$$E_0 = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2} = 8{,}2 \cdot 10^{-14}\ \text{J}.$$

Da 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J ist, wird die Ruhenergie des Elektrons

$$E_0 = 5{,}12 \cdot 10^{5}\ \text{eV} = \underline{0{,}51\ \text{MeV}}.$$

156. Bestimmen Sie die Energie, den Impuls sowie die relativistische Masse eines Röntgenlichtquants der Wellenlänge $\lambda = 0{,}1$ nm.

Lösung

Für die Energie des Photons können wir schreiben

$$W = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{10^{-10}}\ \text{J} = 1{,}987 \cdot 10^{-15}\ \text{J} = \underline{12{,}7\ \text{keV}}.$$

Für seinen Impuls gilt

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34}}{10^{-10}} \text{kgm s}^{-1} = \underline{6{,}624 \cdot 10^{-24} \text{ kgm s}^{-1}}.$$

Die relativistische Masse des Photons bestimmen wir gemäß der Beziehung $E = mc^2$, die den Zusammenhang zwischen Energieeinheit und Masse beliebiger Objekte ausdrückt. Da im vorliegenden Fall $W = h\nu = hc/\lambda$ ist, gilt

$$mc^2 = h\frac{c}{\lambda},$$

so daß wir für die relativistische Masse des Photons den Ausdruck finden:

$$m = \frac{h}{\lambda c} = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34}}{10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ kg} \approx \underline{2{,}21 \cdot 10^{-32} \text{ kg}}.$$

157. Energie und Impuls eines Lichtquants betrachten wir zunächst bezogen auf ein Inertialsystem S und danach bezogen auf ein zweites Inertialsystem S', das sich gegenüber dem erstgenannten mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt. Es ist die Differenz zu bestimmen, durch die sich die beiden Wertepaare unterscheiden, die einmal in bezug auf S und zum anderen in bezug auf S' gelten.

Lösung

Wenn wir die Größe der Energie, des Impulses und der Frequenz des Photons bezüglich S mit den Symbolen W, p und ν, bezüglich des Systems S' aber mit W', p' und ν' bezeichnen, können wir schreiben

$$W = h\nu; \quad p = \frac{h\nu}{c};$$

$$W' = h\nu'; \quad p' = \frac{h\nu'}{c}.$$

Diese Größen werden sich demnach durch die folgenden Differenzen unterscheiden:

$$\Delta W = W - W' = h(\nu - \nu'), \quad \Delta p = p - p' = \frac{h}{c}(\nu - \nu').$$

Der Zusammenhang zwischen den Frequenzen ν und ν' ist entsprechend dem DOPPLER-Prinzip durch die Beziehungen

$$\nu' = \nu - \frac{v}{\lambda} = \nu - \frac{v\nu}{c}$$

und

$$\nu - \nu' = \nu\frac{v}{c}$$

gegeben. Damit erhalten wir

$$\Delta E = h(\nu - \nu') = h\nu \frac{v}{c} = E\frac{v}{c},$$

$$\Delta p = \frac{h}{c}(\nu - \nu') = \frac{h\nu}{c}\,\frac{v}{c} = p\frac{v}{c}.$$

158. Ein Elektron bzw. ein Proton bewege sich durch eine optisch durchsichtige Substanz mit der relativen Brechzahl $n = 1{,}6$. Wie groß muß die kinetische Energie jedes der beiden Elementarteilchen sein, damit es Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung werden kann?

Lösung

Elementarteilchen, die Träger elektrischer Ladung sind, können dann zur Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung werden, wenn ihre Geschwindigkeit in einem bestimmten Medium größer ist als die Phasengeschwindigkeit des Lichtes in eben diesem Medium. In einem Medium mit der Brechzahl n ist die Phasengeschwindigkeit c' des Lichtes durch die Beziehung $c' = c/n$ gegeben, wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bedeutet. Es gibt demnach für Elementarteilchen, die Träger einer elektrischen Ladung sind, eine Grenzgeschwindigkeit v, die dadurch charakterisiert ist, daß die Teilchen Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung werden, sobald sie sich in einem Medium mit einer Geschwindigkeit bewegen, die größer als v ist. Es gilt also

$$v = c' = \frac{c}{n}.$$

Die kinetische Energie des Teilchens hat bei dieser Geschwindigkeit den Wert

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right).$$

a) Für das Elektron ergibt das

$$W_k = 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} \left(\frac{1{,}6}{\sqrt{1{,}6^2 - 1}} - 1 \right) \text{J} = 2{,}295 \cdot 10^{-14}\,\text{J} \approx \underline{143\,\text{keV}}.$$

Demnach wird im angegebenen Medium jedes Elektron zu einer Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung, dessen Inhalt an kinetischer Energie größer oder mindestens gleich 143 keV ist.

b) Für das Proton gilt

$$W_k = 1{,}6722 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \left(\frac{1{,}6}{\sqrt{1{,}6^2 - 1}} - 1 \right) \text{J} =$$

$$= 4{,}21 \cdot 10^{-11}\,\text{J} \approx \underline{263\,\text{MeV}}.$$

Demnach wird im angegebenen Medium jedes Proton zur Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung, dessen kinetische Energie gleich oder größer als 263 MeV ist.

159. In einem durch das Laboratorium definierten Bezugssystem haben π-Mesonen eine kinetische Energie $W_k = 7\, m_0 v^2$, wobei m_0 die Ruhmasse eines π-Mesons ist. In diesem Zustand beträgt ihre mittlere Lebensdauer $\tau = 1{,}76 \cdot 10^{-5}$ s. Ermitteln Sie hieraus die Ruhlebensdauer dieser Mesonen.

Lösung

Die Mesonen bewegen sich mit hoher Geschwindigkeit gegenüber dem Labor-Bezugssystem. Es tritt deshalb eine relativistische Zeitdehnung auf; die Mesonen existieren gegenüber dem Bezugssystem, in dem sie sich bewegen, länger als in dem, in welchem sie ruhen, d. h. relativ zu dem sie sich in Ruhe befinden. Deshalb verstehen wir unter dem Begriff Ruhlebensdauer ihre Lebensdauer in dem System, relativ zu welchem sie ruhen. Zwischen Ruhlebensdauer τ_0 und der gemessenen Lebensdauer τ besteht der Zusammenhang

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Da für die kinetische Energie

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

gilt, können wir schreiben

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{W_k + m_0 c^2},$$

woraus folgt

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\tau}{\frac{W_k + m_0 c^2}{m_0 c^2}} = \frac{\tau}{\frac{W_k}{m_0 c^2} + 1} =$$

$$= \frac{1{,}76 \cdot 10^{-5}}{7 + 1}\,\mathrm{s} = \underline{2{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}}.$$

A **Aufgaben**

209. Ein Staubteilchen der Masse $m = 10^{11-}$ g befindet sich zwischen den horizontal liegenden Platten eines Plattenkondensators, deren Abstand 0,5 cm beträgt und zwischen denen eine Potentialdifferenz $\Delta\varphi = 76{,}5$ V liegt, so im Schwebezustand, daß Gravitation und elektrische Kraft im Gleichgewicht sind. Wieviel Elementarladungen trägt das Staubteilchen?

210. Ein Elektron durchläuft, beginnend aus der Ruhelage, in einem elektrostatischen

Feld eine Potentialdifferenz der Größe $\Delta\varphi = 100$ V. Welche Endgeschwindigkeit erreicht es, wenn wir eine relativistische Massenveränderung vernachlässigen?

211. Ein Elektron mit der kinetischen Energie $W_k = 5$ keV tritt in ein zu seiner Geschwindigkeitsrichtung senkrecht stehendes, homogenes elektrostatisches Feld mit der Feldstärke vom Betrag $E = 10^3$ V cm^{-1} ein. Wie groß wird seine Richtungsänderung beim Durchfliegen der Strecke $x_0 = 2$ cm?

212. Ein Elektron tritt mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 1500$ km s^{-1} in ein homogenes Magnetfeld ein, dessen Feldstärke $H = 1600$ A/m senkrecht zur ursprünglichen Bewegungsrichtung des Elektrons orientiert ist. Berechnen Sie den Radius der vom Elektron im Magnetfeld beschriebenen Kreisbahn.

213. Zwischen den Polen eines Zyklotrons, mit dem Deuteronen beschleunigt werden, besteht ein Magnetfeld mit der Induktion $B = 1{,}4$ T. Berechnen Sie die Frequenz des elektrischen Feldes.

214. Bestimmen Sie Masse und kinetische Energie eines Elektrons, das sich mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}6$ c bewegt (*c* Vakuumlichtgeschwindigkeit).

215. Bestimmen Sie Masse und Geschwindigkeit eines Protons, dessen kinetische Energie mit 10^8 eV angegeben ist.

216. Ein frei fliegendes Elektron hat eine kinetische Energie von 1 MeV. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der es sich bewegt.

217. Aus einer Platinfläche, die mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 150$ nm bestrahlt wird, treten Photoelektronen mit einer Geschwindigkeit $v = 827$ km s^{-1} aus. Berechnen Sie die Austrittsarbeit des Platins.

218. Bei der Streuung von Licht an Protonen wird eine maximale Wellenlängenänderung $\Delta\lambda = 2{,}6 \cdot 10^{-6}$ nm gemessen. Wie groß ist die Masse des Protons?

219. Ermitteln Sie die Wellenlänge der beim COMPTON-Effekt auftretenden Streustrahlung, wenn die Beobachtung senkrecht zum einfallenden Röntgenstrahlenbündel der Wellenlänge $\lambda = 0{,}05$ nm vorgenommen wird.

220. Lichtquanten mit der Wellenlänge $\lambda = 0{,}05$ nm treffen auf freie Elektronen. Berechnen Sie den Winkel der Bewegungsrichtung der dabei getroffenen Elektronen für den Fall, daß die Lichtquanten gegenüber ihrer ursprünglichen Richtung um einen Winkel $\vartheta = 30°$, $60°$, $90°$ bzw. $180°$ abgelenkt werden.

221. Wie groß ist das Ionisationspotential von verdampften Natriumatomen, wenn die Ionisation bei Beleuchtung mit monochromatischem Licht der Wellenlänge $\lambda = 0{,}242$ µm einsetzt?

222. Das Ionisationspotential eines Quecksilberatoms hat den Wert $V_i = 10{,}4$ V. Welche Minimalgeschwindigkeit müßte ein Elektron haben, das beim Zusammenstoß das Hg-Atom zu ionisieren vermag?

223. Welche kinetische Energie hat ein Proton, wenn die Wellenlänge der ihm zuzuordnenden DE-BROGLIE-Welle den Wert $\lambda = 9{,}04 \cdot 10^{-4}$ nm hat?

224. Bestimmen Sie Energie, Impuls und relativistische Masse eines Quants der γ-Strahlung, dessen Wellenlänge 0,001 nm beträgt.

225. Eine bestimmte Art von Elementarteilchen löst, wenn ihre kinetische Energie mehr als 38 MeV beträgt, in einem Medium mit der Brechzahl $n = 1{,}5$ TSCHERENKOW-Strahlung aus. Um welche Art Elementarteilchen handelt es sich?

226. In einer Röntgenröhre bewegen sich Elektronen mit einer Geschwindigkeit, die gleich der halben Vakuumlichtgeschwindigkeit ist. Berechnen Sie die Grenzwellenlänge der beim Aufprall auf die Anode freiwerdenden Röntgenbremsstrahlung.

227. Experimentell wurde festgestellt, daß π-Mesonen, deren Impuls im Bezugssystem des Laboratoriums den Wert $p = 54\,\text{MeV}\,c^{-1}$ hat, vom Ort ihrer Entstehung bis zum Ort ihres Zerfalls eine durchschnittliche Wegstrecke von $l = 3$ m zurücklegen. Bestimmen Sie die Ruhlebensdauer dieser Art Mesonen. Ihre Ruhmasse ist $m_{\pi 0} = 276\, m_0$, wobei m_0 die Ruhmasse des Elektrons angibt.

3.3. Physik der Elektronenhülle

Die **Bohrsche Theorie des Atomaufbaus**, das **Bohrsche Atommodell**, beruht auf drei BOHRschen Postulaten über die Bewegung der Elektronen um den Atomkern:

1. *Die Elektronen können den Atomkern nicht auf beliebigen Bahnen umlaufen, sondern nur auf bestimmten, sog.* **Quantenbahnen**, *die besondere Bedingungen erfüllen müssen. Für den Fall, daß wir uns auf Kreisbahnen beschränken, kann ein Elektron nur auf solchen Bahnen umlaufen, die der Bedingung genügen:*

$$2\pi mrv = nh$$

(m Masse des Elektrons, v seine Geschwindigkeit, r Bahnradius, h PLANCKsches Wirkungsquantum, n Hauptquantenzahl, die jeden beliebigen positiven, ganzzahligen Wert außer Null annehmen kann). Es ist ersichtlich, daß mrv gleich dem Bahndrehimpuls des Elektrons ist, bezogen auf die durch die Bahnmitte gehende, senkrecht auf der Elektronenbahn stehende Achse. Je nach dem von der Hauptquantenzahl n angenommenen Wert sprechen wir von höheren oder niedrigeren Quantenbahnen.

2. *Auf den angegebenen Quantenbahnen können Elektronen strahlungslos umlaufen.*
3. *Unterschiedliche Quantenbahnen entsprechen unterschiedlichen Energiezuständen. Beim Übergang von einer höheren auf eine niedriger gelegene Quantenbahn emittiert das Elektron ein elektromagnetisches Strahlungsquant, ein Lichtquant der Frequenz ν, wobei die Beziehung erfüllt ist:*

$$h\nu = W_2 - W_1.$$

W_1 bzw. W_2 sind die Energien des Elektrons auf denjenigen Quantenbahnen, zwischen denen der Übergang erfolgte.

Ganz analog kann ein Elektron, wenn ihm eine genügend große Anregungsenergie zugeführt wird, den Übergang von einer niedrigeren auf eine höher gelegene Quantenbahn ausführen, wobei die Größe des Quantensprunges vom Maß der zugeführten Energie abhängig ist.

Die Wellenzahl $\bar{\nu}$ einer bestimmten Spektrallinie stellt den Kehrwert der zugehörigen Wellenlänge λ dar: $\bar{\nu} = 1/\lambda$. Für die Wellenzahl der Spektrallinien des Wasserstoffs gilt die Beziehung

$$\bar{\nu} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

($n_1 = 1, 2, 3, 4, 5$ und $n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, R$ die RYDBERG-Zahl). Unter der Voraussetzung, daß die Masse des Atomkerns gegenüber der des Elektrons als unendlich groß angenommen wird, hat R den Wert $1{,}097373 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$.
Ein Satz von Spektrallinien, die einem bestimmten Wert n_1 zugehören, stellt eine **Serie** dar, für die $n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots$ ist. Diejenige Wellenzahl, die bei einem Quantensprung entsteht, der bei $n_2 = \infty$ beginnt, entspricht einer Spektrallinie, die wir als *Seriengrenze* bezeichnen. Die Quantensprünge (Elektronenübergänge) der BALMER-*Serie* enden bei $n_1 = 2$.
Entsprechend der verallgemeinerten BOHRschen Atomtheorie wird der Zustand eines Elektrons in der Elektronenhülle durch vier Quantenzahlen bestimmt: die Hauptquantenzahl n, die Nebenquantenzahl l, die magnetische Quantenzahl m und die Spinquantenzahl s. Diese Quantenzahlen werden gemäß folgenden Festlegungen normiert:
1. Für einen bestimmten Wert der Hauptquantenzahl n kann die Nebenquantenzahl l folgende Werte annehmen:

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

2. Für einen bestimmten Wert der Nebenquantenzahl l kann die magnetische Quantenzahl m folgende Werte annehmen:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(l - 1), \pm l.$$

3. Die Spinquantenzahl kann nur die beiden Werte $s = \pm 1/2$ annehmen.
Gemäß dem PAULIschen Ausschließungsprinzip kann ein Atom niemals zwei Elektronen enthalten, die in allen ihren durch die vier Quantenzahlen bestimmten Eigenschaften übereinstimmen.

B **Beispiele**

160. Berechnen Sie den Radius der kernnächsten Bahn eines Elektrons, das gemäß der BOHRschen Atomtheorie um den Kern eines Wasserstoffatoms umläuft. Berechnen Sie auch die Geschwindigkeit des Elektrons auf dieser Bahn.

Lösung

Im BOHRschen Atommodell bewegt sich das Elektron um den Atomkern unter dem Einfluß von COULOMB-Kraft und Fliehkraft, so daß die folgende Beziehung gilt:

$$m_0 \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} .$$

Gemäß dem BOHRschen Postulat muß weiter gelten

$$2\pi r m_0 v = nh,$$

wobei $n = 1, 2, 3, \cdots$ die Hauptquantenzahl und h das PLANCKsche Wirkungsquantum bedeutet. Für den Radius der n-ten Bahn ergibt sich aus den angeführten Gleichungen

$$r = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} n^2 .$$

Für den Radius der ersten Bahn ($n = 1$) finden wir

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (6{,}63)^2 \cdot 10^{-68}}{3{,}14 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}602)^2 \cdot 10^{-38}} \text{ m} \approx 0{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ m} =$$
$$= \underline{0{,}53 \text{ Å}} .$$

Für die Geschwindigkeit v des Elektrons entnehmen wir aus den angeführten Gleichungen

$$v = \frac{nh}{2\pi r m_0} = \frac{nh}{2\pi m_0 \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} n^2} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh} .$$

Für die Bahn mit $n = 1$ wird

$$v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} = \frac{(1{,}602)^2 \cdot 10^{-38}}{2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}} \text{ m s}^{-1} = \underline{2{,}188 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}} .$$

161. Mit welcher Kraft ziehen sich gemäß dem BOHRschen Atommodell Kern und Elektron eines Wasserstoffatoms an, wenn das Elektron sich auf der ersten Bahn befindet? Berechnen Sie, wievielmal so groß diese Kraft ist als die zwischen beiden Teilchen wirkende Massenanziehung.

Lösung

Für die Kraft der COULOMB-Anziehung gilt

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_1^2} ,$$

wobei $r_1 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m den Radius der ersten Quantenbahn bedeutet. Mit ihm wird

$$F_1 = \frac{(1{,}602)^2 \cdot 10^{-38}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}53)^2 \cdot 10^{-20}} \text{ N} = \underline{0{,}0821 \cdot 10^{-6} \text{ N}} .$$

Die Gravitationskraft, mit der Proton und Elektron in der gleichen Entfernung aufeinander wirken, ergibt sich zu

$$F_1' = \gamma \frac{m_0 m_p}{r_1^2} = \gamma \frac{1840 m_0^2}{r_1^2} = 6{,}685 \cdot 10^{-11} \frac{1840 \cdot (9{,}109)^2 \cdot 10^{-62}}{(0{,}53)^2 \cdot 10^{-20}} \text{ N} =$$

$$= 3{,}63 \cdot 10^{-47} \text{ N}.$$

$$\frac{F_1}{F_1'} = \frac{8{,}21 \cdot 10^{-8}}{3{,}63 \cdot 10^{-47}} = \underline{2{,}26 \cdot 10^{39}}.$$

Demnach ist die COULOMB-Kraft $2{,}26 \cdot 10^{39}$mal so groß wie die hier wirkende Massenanziehung.

162. Berechnen Sie die Gesamtenergie eines Elektrons, das sich auf der zweiten Quantenbahn im BOHRschen Atommodell des Wasserstoffatoms bewegt.

Lösung

Die Gesamtenergie des Elektrons setzt sich aus den Anteilen der potentiellen und der kinetischen Energie zusammen. Wenn wir den Radius der n-ten Quantenbahn mit dem Symbol r_n kennzeichnen, können wir für die potentielle Energie des Elektrons auf dieser Quantenbahn – bezogen auf Unendlich, d. h. in unendlicher Entfernung; denn im Zustand der Abgelöstheit, der Ionisation, ist die potentielle Energie des Elektrons gleich Null – schreiben

$$W_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r_n} \frac{e^2}{r^2} \, dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{e^2}{r} \right]_{\infty}^{r_n} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Für die kinetische Energie erhalten wir unter Hinzuziehung der Gleichung

$$m_0 \frac{v^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}$$

$$W_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Damit beträgt die Gesamtenergie des Elektrons

$$W = W_p + W_k = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Da $r_n = \dfrac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m_0 e^2}$ ist, wird

$$W = -\frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2}.$$

Für den Fall $n = 2$ erhalten wir

$$W_2 = -\frac{m_0 e^4}{32\varepsilon_0^2 h^2} = -\frac{9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}602)^4 \cdot 10^{-76}}{32 \cdot (8{,}86)^2 \cdot 10^{-24} \cdot (6{,}63)^2 \cdot 10^{-68}} \text{ J}.$$

$$= -5{,}45 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \underline{-3{,}4 \text{ eV}}.$$

163. Bestimmen Sie die Wellenlänge des Lichtquants, das beim Übergang des Wasserstoff-Elektrons von der vierten auf die zweite Quantenbahn emittiert wird.

Lösung

Für die Energie, die beim Quantensprung von der vierten auf die zweite Bahn frei wird, gilt

$$h\nu = W_4 - W_2 = -\frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 4^2 h^2} + \frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 2^2 h^2} = -W_2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4} W_2 .$$

In Beispiel 362 fanden wir für $W_2 = -5{,}45 \cdot 10^{-19}$ J. Damit wird

$$h\nu = 4{,}09 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J},$$

und

$$\nu = \frac{4{,}09 \cdot 10^{-19}}{6{,}62 \cdot 10^{-34}}\ \mathrm{s^{-1}} = 6{,}178 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s^{-1}}.$$

Für die Wellenlänge des emittierten Quants gilt

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{6{,}178 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s^{-1}}} = 0{,}485 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = \underline{0{,}485\ \mu\mathrm{m}.}$$

164. Wie groß ist die Wellenlänge des Lichtes, das beim Elektronensprung von der sechsten auf die zweite Quantenbahn im BOHRschen Atommodell des Wasserstoffs freigesetzt wird? Welche Wellenlänge gehört zur Seriengrenze der BALMER-Serie?

Lösung

Für die Wellenzahl des freigesetzten Lichtes gilt

$$\bar{\nu} = R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right) = R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right) = \frac{2}{9} R_\mathrm{H} = 1{,}097373 \cdot 10^7 \cdot 0{,}2222\ \mathrm{m^{-1}} =$$
$$= 2{,}438363 \cdot 10^6\ \mathrm{m^{-1}}.$$

Demnach erhalten wir für die Wellenlänge die Angabe

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\nu}} = 0{,}410 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = \underline{0{,}410\ \mu\mathrm{m}.}$$

Die zur Seriengrenze der BALMER-Serie gehörige Wellenzahl ist

$$\bar{\nu}_\infty = R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{2^2}\right) = \frac{R_\mathrm{H}}{4}.$$

Die zur Seriengrenze der BALMER-Serie gehörige Wellenlänge ist daher

$$\lambda_\infty = \frac{1}{\bar{\nu}_\infty} = \frac{4}{R_\mathrm{H}} = 0{,}364 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = \underline{0{,}364\ \mu\mathrm{m}.}$$

165. Wie groß ist, entsprechend der BOHRschen Atomtheorie, das magnetische Bahnmoment des Elektrons im Wasserstoffatom, das sich im Grundzustand befindet?

Lösung

Das magnetische Moment einer Stromschleife mit dem Flächeninhalt A, durch die ein Strom der Stärke I fließt, hat den Wert

$$m = \mu_0 I A$$

(μ_0 magnetische Feldkonstante).
Das Elektron durchläuft die Bahn, die dem Grundzustand entspricht, x-mal, also ist der Strom $I = xe$. Da der Radius dieser Bahn r_1 ist, wird die umlaufene Fläche $A = \pi r_1^2$, so daß für das magnetische Bahnmoment folgt:

$$m = \mu_0 x e \pi r_1^2 = \mu_0 \frac{v_1}{2\pi r_1} e \pi r_1^2 = \mu_0 \frac{v_1 r_1 e}{2}.$$

Da entsprechend Beispiel 360

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} \quad \text{und} \quad v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}$$

ist (m_0 Ruhmasse des Elektrons, ε_0 elektrische Feldkonstante), gilt

$$m = \frac{1}{2} \mu_0 e \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{he}{m_0} = \underline{1{,}165 \cdot 10^{-29}\ \text{Vsm}.}$$

166. Bestimmen Sie die höchstmögliche Anzahl von Elektronen, die auf Grund des PAULI-Prinzips in einem Atom gleichzeitig den n-ten Quantenzustand einnehmen können, für den Fall, daß $n = 4$ ist.

Lösung

Da die einzelnen Quantenzahlen der Bedingung folgen, daß für ein bestimmtes n

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1,$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(l - 1), \pm l,$$

$$s = \pm \frac{1}{2}$$

sein kann, folgt für

n	l	m	s	maximale Elektronenzahl	
	0	0		2	
4	1	−1, 0, +1,	$\pm \frac{1}{2}$	6	32
	2	−2, −1, 0, +1, +2,		10	
	3	−3, −2, −1, 0, +1, +2, +3		14	

Dabei haben wir auf Grund des PAULI-Prinzips vorausgesetzt, daß sich die Quadrupel aller vier Quantenzahlen, die den Zustand jedes einzelnen Elektrons charakterisieren, in jedem Einzelfall um mindestens eine Kenngröße unterscheiden muß.

A Aufgaben

228. Berechnen Sie die Umlaufgeschwindigkeit des Elektrons auf der dritten Quantenbahn im BOHRschen Atommodell eines Wasserstoffatoms.
229. Wie groß ist die Umlaufperiode des Elektrons auf der dritten Quantenbahn im BOHRschen Atommodell des Wasserstoffatoms?
230. Berechnen Sie die Wellenlängen der ersten drei Linien der BALMER-Serie des Wasserstoffspektrums ($R = 1{,}097373 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$).
231. In einem Glaskolben eingeschlossener, verdünnter Quecksilberdampf wird mit Elektronen bestrahlt, deren kinetische Energie 4,88 eV beträgt. Wie groß ist die Wellenlänge der von den Quecksilberatomen emittierten Strahlung, wenn bei den Stoßprozessen die gesamte Energie der Elektronen auf die Quecksilberatome übertragen wird?
232. In welchem Verhältnis stehen magnetisches Moment und Bahndrehimpuls für ein Elektron des Wasserstoffs, das sich gemäß der BOHRschen Atomtheorie auf der n-ten Quantenbahn befindet?
233. Mit Hilfe des PAULI-Prinzips ist nachzuweisen, wieviel Elektronen maximal auf einer Elektronenschale der Hauptquantenzahl $n = 3$ enthalten sein können.

3.4. Physik des Atomkerns

Natürliche radioaktive Substanzen können drei Arten von Strahlung emittieren: α-, β- und γ-Strahlung.

Die **α-Strahlung** besteht aus einem Strom von Atomkernen des Elements Helium, **β-Strahlung** ist ein Strom von Elektronen, **γ-Strahlung** kann sowohl als eine elektromagnetische Strahlung sehr kurzer Wellenlänge sowie auch als ein Strom von Photonen sehr hoher Frequenz angesehen werden. Bei der Emission eines α- oder β-Teilchens verwandelt sich der radioaktive Kern eines Elements in den eines anderen Elements.

Im Prozeß der radioaktiven α-Umwandlung verschiebt sich ein Atomkern im **Proton-Neutron-Diagramm** (Abszisse: Protonenzahl = Ordnungszahl, Ordinate: Neutronenzahl) der Kerne um zwei Stellen nach links, seine Masse verringert sich um vier Kernmasseneinheiten.

Im Prozeß der radioaktiven β-Umwandlung verschiebt sich der betreffende Kern bei konstant bleibender Masse um eine Stelle nach rechts, zum Element nächsthöherer Ordnungszahl hin. Die Wegstrecke, die ein β-Teilchen bei seiner Bewegung in irgendeinem Medium zurücklegt, wird als die **Reichweite** der β-Strahlung bezeichnet.

Die radioaktive Umwandlung der instabilen Kerne verläuft selbständig und folgt dabei bestimmten Gesetzmäßigkeiten:
Von einer radioaktiven Substanz, die zur Zeit t noch eine Anzahl n nichtzerfallener Kerne enthält, verwandeln sich während des Zeitintervalls $\mathrm{d}t$ genau $\mathrm{d}n$ Kerne gemäß der Beziehung

$$\mathrm{d}n = -\lambda n \,\mathrm{d}t,$$

wobei λ die **Zerfallskonstante** der betreffenden Kernart bedeutet. Der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\lambda n$$

bezeichnet die Geschwindigkeit, mit welcher der Zerfall des betreffenden radioaktiven Stoffes verläuft.
Die Zeitabhängigkeit der Zahl noch nicht zerfallener Kerne einer radioaktiven Substanz wird durch die Exponentialbeziehung

$$n = n_0 \,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

ausgedrückt, in der n_0 die Anzahl der zur Zeit $t = 0$ noch nicht umgewandelten Kerne bedeutet.
Als **Halbwertzeit** wird diejenige Zeitspanne bezeichnet, in der die Hälfte einer anfänglich vorhanden gewesenen Zahl von Kernen ihre radioaktive Umwandlung vollzieht. Den Zusammenhang zwischen der Halbwertzeit $T_{1/2}$ und der Zerfallskonstanten λ einer radioaktiven Kernart bezeichnet die Beziehung

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

Für die aufeinanderfolgenden Glieder einer radioaktiven **Zerfallsreihe** gilt, daß sie sich dann im radioaktiven Gleichgewicht befinden, wenn die Zerfallsgeschwindigkeit der Glieder der Reihe gleich groß ist.
In einem Gemisch von Kernen, das sich im Zustand des radioaktiven Gleichgewichts befindet, ist die Zahl der vorhandenen Kerne proportional zu ihren jeweiligen Halbwertzeiten, also

$$n_1 : n_2 : n_3 : \ldots = T_{1/2\,1} : T_{1/2\,2} : T_{1/2\,3} : \ldots$$

Die **Kernladungszahl** Z eines Elements bestimmt die elektrische Ladung des Atomkerns und ist gleichbedeutend mit der Ordnungszahl des betreffenden Elements im Periodensystem von MENDELEJEW. Die **Kernmassenzahl** A gibt die Masse eines Kernes, ausgedrückt in ganzzahligen Kernmasseneinheiten, an. Kerne mit gleicher Kernladungszahl, aber unterschiedlicher Massenzahl, werden **Isotope** genannt.

Der Kern eines Elements mit der Ordnungszahl Z und der Kernmassenzahl A setzt sich aus Z Protonen und $A - Z$ Neutronen zusammen.
Als **künstliche Kernumwandlung** wird ein Prozeß bezeichnet, bei dem ein mit Elementarteilchen oder Photonen (Lichtquanten) beschossener Kern in einen anderen umgewandelt wird. Bei diesen Reaktionen können Veränderungen des Energieinhalts oder der Ruhmasse eines Kerns auftreten. Unter **Massendefekt** versteht man den Verlust an Masse, den die Summe der Ruhmassen aller am Kernaufbau beteiligten Elementarteilchen erleidet: Die Summe der Ruhmassen der einzelnen Teilchen ist größer als die der gleichen Teilchen, wenn sie zu einem Kern vereinigt sind. Der im Verlauf einer Kernreaktion frei werdende Energiebetrag ΔE hängt mit dem im Laufe dieser Reaktion auftretenden Massendefekt zusammen, was durch die Gleichung

$$\Delta E = \Delta m c^2 \tag{1}$$

ausgedrückt wird (c die Vakuumlichtgeschwindigkeit).
Dem Massendefekt um eine Kernmasseneinheit (Masse eines Nukleons) entspricht eine Energiedifferenz der Größe $\Delta E = 931{,}8$ MeV.
Aus genauen Messungen ergibt sich, daß die Masse eines Atomkerns stets kleiner ist als die Summe der Massen der isolierten Protonen und Neutronen, aus denen der Kern sich zusammensetzt. Diese Massendifferenz ermöglicht die Berechnung der Kernbindungsenergie E_B entsprechend der Beziehung

$$E_B = \Delta m c^2.$$

B Beispiele

167. Der Kern Uran $^{238}_{92}U$ erleidet nacheinander vier α- und zwei β-Umwandlungen, wobei er sich in den Kern eines anderen Elements umwandelt. Bestimmen Sie die nach den Umwandlungen resultierende Kernart.

Lösung

Wir können die Umwandlung schematisch darstellen:

$$^{238}_{92}U \rightarrow 4\,^{4}_{2}He + 2\,^{0}_{-1}e + ^{a}_{b}X.$$

Da die Gesetze von der Erhaltung der Massenzahl und der elektrischen Ladung gelten, müssen für die Bestimmungsgrößen a und b die Gleichungen

$$a + 0 + 16 = 238,$$

$$b - 2 + 8 \;= 92$$

erfüllt sein. Daraus ergibt sich

$$a = 222,$$
$$b = 86.$$

Durch diese Umwandlung entsteht also ein Kern $^{222}_{86}$Rn des Elements Radon. Er enthält $Z = 86$ Protonen und $N = A - Z = 136$ Neutronen.

168. Durch den Beschuß der Kerne des stabilen Phosphorisotops $^{31}_{15}$P mit Deuteronen wird ein radioaktives Phosphorisotop $^{32}_{15}$P* gebildet, dessen Halbwertzeit $T_{1/2} = 14{,}3$ Tage beträgt. Die Reaktion verläuft gemäß folgender Darstellung:

$$^{31}_{15}\mathrm{P} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{32}_{15}\mathrm{P}^* + {}^{1}_{1}\mathrm{H}.$$

Berechnen Sie, welche Menge an radioaktiven Kernen des Phosphorisotops $^{32}_{15}$P* zwölf Stunden nach Abbruch der Deuteronenbestrahlung noch vorhanden ist.

Lösung

Für den radioaktiven Zerfall des künstlich aktivierten Phosphorisotops $^{32}_{15}$P* gelten die gleichen Gesetzmäßigkeiten wie für den der natürlichen radioaktiven Isotope. So verbleiben nach Ablauf der Zeitspanne t von einer ursprünglich vorhandenen Kernanzahl n_0 des radioaktiven Isotops noch n nichtzerfallene Kerne. Dabei ist die Bedingung

$$n = n_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

erfüllt. Da

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

ist, ergibt sich

$$\frac{n}{n_0} = \mathrm{e}^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir für die relative Anzahl noch nicht zerfallener radioaktiver Kerne

$$\frac{n}{n_0} = \mathrm{e}^{-\frac{12\,\mathrm{h} \cdot 0{,}693}{343{,}2\,\mathrm{h}}} = \underline{0{,}98.}$$

169. Eine radioaktive Substanz mit der Halbwertzeit $T_{1/2} = 3$ min liegt in einer Ausgangsmenge $m_0 = 50$ µg vor. Bestimmen Sie die Zeit, innerhalb der die Teilmenge $\Delta m = 10$ µg zerfällt.

Lösung

Nach Ablauf der Zeit t verbleiben von den ursprünglich vorhandenen n_0 Kernen noch

$$n = n_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{1}$$

nichtzerfallene Kerne

Da die Masse einer bestimmten Menge radioaktiver Substanz proportional zur Anzahl der in ihr enthaltenen Kerne ist, kann Gl. (1) auch in die Form

$$m = m_0 \, e^{-\lambda t} \tag{2}$$

gebracht werden (m_0 Masse der Ausgangsmenge, m Masse der nach Ablauf der Zeit t noch nicht zerfallenen Kerne). Da weiter

$$m = m_0 - \Delta m \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

ist, resultiert aus Gl. (2)

$$\frac{m_0 - \Delta m}{m_0} = e^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}},$$

woraus wir nach einer Umformung erhalten

$$t = -\frac{T_{1/2}}{\lg 2} \lg \frac{m_0 - \Delta m}{m_0}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen ergibt sich

$$t = -\frac{180 \text{ s}}{0{,}30103} \lg \frac{40}{50} = \underline{58 \text{ s.}}$$

170. Berechnen Sie, welche Anzahl von Kernen innerhalb einer Sekunde in einem Kilogramm Uran des Isotops $^{238}_{92}U$ zerfallen, wenn dessen Halbwertzeit mit $T_{1/2} = 4{,}5 \cdot 10^9$ Jahre gegeben ist.

Lösung

Zur Zeit t möge die angegebene Substanz noch n unzerfallene Kerne enthalten. Von diesen erleiden in einem Zeitintervall dt

$$dn = -n\lambda \, dt$$

und in der Zeiteinheit

$$Z = -\frac{dn}{dt} = n\lambda \tag{1}$$

ihren Zerfall.

Ein Kilomol Uran $^{238}_{92}U$ enthält $10^3 \, N_A = 6{,}02 \cdot 10^{26}$ Atome. Da ein Kilogramm Uran $^1/_{238}$ Kilomol enthält, sind in einem Kilogramm Uran

$$n_0 = \frac{1000}{238} \, 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ Atome} \tag{2}$$

zur Zeit $t = 0$ enthalten. Innerhalb der Zeiteinheit zerfallen von ihnen gemäß Gl. (1)

$$Z = n_0 \lambda$$

Kerne. Wenn wir noch berücksichtigen, daß die Gleichung

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}}$$

den Zusammenhang zwischen der Zerfallskonstanten λ und der Halbwertzeit $T_{1/2}$ angibt, erhalten wir aus Gl. (2)

$$Z = \frac{1000}{238}\, 6{,}02 \cdot 10^{23}\, \frac{0{,}693}{1{,}4 \cdot 10^{17}}\ \text{s}^{-1} = \underline{1{,}25 \cdot 10^{7}\ \text{s}^{-1}}.$$

171. Berechnen Sie, welche Mengen Radium $^{226}_{88}$Ra und Radon $^{222}_{86}$Rn sich mit einem Gramm Uran $^{238}_{92}$U im Gleichgewicht befinden. Die Halbwertzeiten der beteiligten Substanzen Uran, Radium und Radon sind jeweils $T_{1/2\,1} = 4{,}4 \cdot 10^{9}$ a, $T_{1/2\,2} = 1590$ a, $T_{1/2\,3} = 3{,}825$ d.

Lösung

Die Atomkerne $^{226}_{88}$Ra und $^{222}_{86}$Rn sind Glieder einer Zerfallsreihe, deren erstes Glied der Kern $^{238}_{92}$U ist.

Die Elemente einer bestimmten Reihe radioaktiver Substanzen, einer ‚Zerfallsreihe', sind dann miteinander im Gleichgewicht, wenn die Zahl $\mathrm{d}n_i$ der im Zeitintervall zwischen t und $t + \mathrm{d}t$ zerfallenden Kerne für die Muttersubstanz und für die Elemente ihrer Zerfallsreihe gleich groß ist. Es gilt also die Bedingung

$$\mathrm{d}n_1 = \mathrm{d}n_2 = \ldots = \mathrm{d}n_k. \tag{1}$$

Wenn wir die Zahl der zur Zeit t noch intakten Kerne eines Elements mit dem Symbol n kennzeichnen, dann wird die Beziehung

$$\mathrm{d}n_i = -\lambda_i n_i\, \mathrm{d}t$$

erfüllt, und wir können Gl. (1) umschreiben in

$$\lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2 = \ldots = \lambda_k n_k. \tag{2}$$

An Stelle der Zerfallskonstanten λ_i setzen wir entsprechend der Gleichung

$$\lambda_i = \frac{\ln 2}{T_{1/2\,i}}$$

die Halbwertzeiten $T_{1/2\,i}$ ein und erhalten die Bedingung für radioaktives Gleichgewicht

$$\frac{n_1}{T_{1/2\,1}} = \frac{n_2}{T_{1/2\,2}} = \ldots = \frac{n_k}{T_{1/2\,k}}.$$

In unserem Fall stehen n_1 Urankerne mit n_2 Radiumkernen und n_3 Radonkernen im radioaktiven Gleichgewicht und erfüllen deshalb die Beziehung

$$\frac{n_1}{T_{1/2\,1}} = \frac{n_2}{T_{1/2\,2}} = \frac{n_3}{T_{1/2\,3}}.$$

Daraus resultiert

$$n_2 = n_1 \frac{T_{1/2\,2}}{T_{1/2\,1}} \quad \text{und} \quad n_3 = n_1 \frac{T_{1/2\,3}}{T_{1/2\,1}}.$$

Für die n Kerne eines Elements, dessen Grammatom die Masse M hat, gilt, daß ihnen eine Masse

$$m = \frac{M}{N_A} n \text{ g} \tag{3}$$

zukommt. Wir berücksichtigen weiter, daß ein Gramm Uran $^{238}_{92}U$

$$n_1 = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{238} \text{ Atome}$$

enthält, und finden unter Verwendung der Gl. (3) eine Beziehung für die Radiummenge m_2 und die Radonmenge m_3, die sich mit einem Gramm der Muttersubstanz im radioaktiven Gleichgewicht befinden, zu

$$m_2 = \frac{M_2}{N_A} n_1 \frac{T_{1/2\,2}}{T_{1/2\,1}} \quad \text{und} \quad m_3 = \frac{M_3}{N_A} n_1 \frac{T_{1/2\,3}}{T_{1/2\,1}}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir schließlich

$$m_2 = \frac{226}{6{,}02 \cdot 10^{23}} \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{238} \frac{1590}{4{,}4 \cdot 10^9} \text{ g} = \underline{3{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ g}},$$

$$m_3 = \frac{222}{238} \frac{3{,}825}{4{,}4 \cdot 10^9 \cdot 365} \text{ g} = \underline{2{,}2 \cdot 10^{-12} \text{ g}}.$$

172. Mit Hilfe von Zählrohrmessungen ist festgestellt worden, daß 1 g Radium in einer Sekunde $3{,}7 \cdot 10^{10}$ α-Teilchen emittiert. Bestimmen Sie den Wert der Avogadroschen Zahl unter Verwendung der weiteren Angaben, daß die Halbwertzeit des Radiums 1590 Jahre und seine relative Atommasse 226,05 beträgt.

Lösung

Wir gehen von der Zerfallsgleichung in der Differentialform

$$\mathrm{d}n = -\lambda n \,\mathrm{d}t$$

aus, die wir umformen in

$$\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}\right| = \lambda n.$$

Im vorstehenden Fall bedeutet der Bruch $\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}\right|$ die Zahl der in der Zeiteinheit in einem Gramm Radium stattfindenden Zerfallsakte. Dabei ist n die Zahl der in 1 g Ra enthaltenen Atome. Für die Avogadrosche Zahl N_A, d. h. für die im Grammatom Radium enthaltenen Atome, gilt dann

$$N_A = 226{,}05\, n = 226{,}05 \frac{1}{\lambda} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} =$$

$$= 226{,}05 \frac{1590 \cdot 365 \cdot 86400}{0{,}693} 3{,}7 \cdot 10^{10} = \underline{6{,}02 \cdot 10^{23}}.$$

Zu diesem Ergebnis gelangen wir unter der Voraussetzung, daß wir den Zusammenhang zwischen Zerfallskonstante λ und Halbwertzeit $T_{1/2}$ entsprechend der Gleichung $\lambda = 0{,}693/T_{1/2}$ berücksichtigt haben.

173. Im Innern einer Kapsel, deren Wandmaterial für α-Strahlung völlig undurchlässig ist, befindet sich 1 g Radium. Berechnen Sie den Betrag der Gesamtenergie, die innerhalb einer Stunde im Innern der Kapsel freigesetzt wird, wenn wir voraussetzen, daß die Energie jedes bei den Zerfallsakten frei werdenden α-Teilchens den Wert $E_\alpha = 4{,}7$ MeV hat.

Lösung

Wir beschränken uns auf den durch die α-Strahlung transportierten Energieanteil. Bei der Emission des α-Teilchens erhält der emittierende Kern einen Rückstoß, wodurch er sich mit der Geschwindigkeit v_K in entgegengesetzter Richtung zum emittierten α-Teilchen bewegt. Entsprechend dem Satz von der Erhaltung des Impulses bleibt der Gesamtimpuls des Systems Kern + α-Teilchen konstant. Unter Beschränkung auf die Absolutbeträge können wir schreiben

$$m_K v_K = m_\alpha v_\alpha. \tag{1}$$

Nach der Emission ist die gesamte freigesetzte Energie gleich der Summe der Bewegungsenergie von Kern und emittiertem α-Teilchen, also

$$E = E_K + E_\alpha = \frac{1}{2} m_K v_K^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2.$$

Unter Einbeziehung der Gl. (1) erhalten wir für die Energie den Ausdruck

$$E = E_\alpha + \frac{1}{2} \frac{m_\alpha^2 v_\alpha^2}{m_K} = E_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_K}\right). \tag{2}$$

Das α-Teilchen ist ein Heliumkern ^4_2He; durch seine Emission verringert sich die Kernmasse des emittierenden Kerns um vier Masseneinheiten. Wir berücksichtigen, daß die Massenzahl A des Kerns zu seiner Masse proportional ist, und finden demnach

$$\frac{m_\alpha}{m_K} = \frac{A_\alpha}{A_K}.$$

Diese Voraussetzung erlaubt uns, Gl. (2) in die Form

$$E = E_\alpha \left(1 + \frac{A_\alpha}{A_K}\right) = E_\alpha \left(1 + \frac{4}{A-4}\right) = \frac{A}{A-4} E_\alpha$$

zu bringen (A Massenzahl des radioaktiven Mutterkerns). Im Verlauf einer Stunde werden von einem Gramm Radium n α-Teilchen emittiert. Also ist die während dieser Zeit freigesetzte Gesamtenergie

$$E' = n \frac{A}{A-4} E_\alpha. \tag{3}$$

Die Zahl der in einem Gramm Radium während einer Stunde stattfindenden Zerfallsakte läßt sich leicht durch Vergleich mit der Lösung von Beispiel 370 ermitteln:

$$n = 3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot 3600\,\mathrm{h}^{-1}.$$

Durch Einsetzen der gegebenen Größen in Gl. (3) finden wir

$$E' = \frac{3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot 3600\,\mathrm{h}^{-1} \cdot 226}{222} \cdot 4{,}7 \cdot 10^6\,\mathrm{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{eV}} = \underline{102\,\mathrm{Jh}^{-1}}.$$

174. Berechnen Sie, welche Energiemenge bei der Reaktion

$${}^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^{2}_{1}\mathrm{D} \rightarrow {}^{11}_{5}\mathrm{B} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$$

frei wird, wenn die Kernmasse des Isotops ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$ mit 10,01618 und die des Isotops ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$ mit 11,01284 Kernmasseneinheiten angegeben wird.

Lösung

Wir gehen von der Summe der Ruhmassen der in die Reaktion eingehenden Teilchen aus. Danach ist

$$m_1 + m_2 = 10{,}01618\,\mathrm{u} + 2{,}01472\,\mathrm{u} = 12{,}03090\,\mathrm{u}.$$

Demgegenüber haben die aus der Reaktion hervorgehenden Teilchen die Ruhmassen

$$m_3 + m_4 = 11{,}01284\,\mathrm{u} + 1{,}00813\,\mathrm{u} = 12{,}02097\,\mathrm{u}.$$

Im Verlauf der Reaktion tritt ein Massendefekt auf von

$$\Delta m = 0{,}009930\,\mathrm{u}.$$

Es handelt sich hierbei ausschließlich um einen Massendefekt des Kerns, denn die Zahl der beteiligten Elektronen ändert sich im vorliegenden Fall nicht.
Bei der Reaktion wird ein Energiebetrag ΔE *frei*, die Reaktion ist *exotherm.* Mit dem Massendefekt hängt der freigesetzte Energiebetrag durch die Beziehung

$$\Delta E = \Delta m c^2$$

zusammen. Der auftretende Massendefekt kann leicht in Masseneinheiten ausgedrückt werden, wenn wir berücksichtigen, daß die nukleare Masseneinheit $1\,\mathrm{u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ ist. Damit wird

$$\Delta m = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{u}} \cdot 0{,}00993\,\mathrm{u},$$

und für die freigesetzte Energie erhalten wir

$$\Delta E = 1{,}64839 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} = 1{,}4843 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = \underline{9{,}28\,\mathrm{MeV}}.$$

175. Das Ergebnis der Kernreaktion

$${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}\mathrm{He},$$

bei der Lithium mit Protonen beschossen wird, die eine Energie von 600 keV haben, sind zwei α-Teilchen, die sich mit einer kinetischen Energie von 8,94 MeV bewegen. Bestimmen Sie aus den bekannten Kernmassen von Proton und α-Teilchen die Kernmasse des Isotops ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$.

Lösung

Im Verlauf dieser Reaktion tritt ein Massendefekt Δm auf; er ist gleich der Differenz der Ruhmassen der in die Reaktion eintretenden und der aus ihr hervorgehenden Teilchen:

$$\Delta m = m_{Li} + m_H - 2m_{He},$$

woraus für die Masse eines Lithiumkerns resultiert

$$m_{Li} = \Delta m - m_H + 2m_{He}. \quad (1)$$

Im Verlauf der exothermen Reaktion wird die Gesamtenergie

$$\Delta E = 2 \cdot 8{,}94 \text{ MeV} - 0{,}6 \text{ MeV} = 17{,}28 \text{ MeV}$$

frei. Der dieser Energiedifferenz entsprechende Massendefekt errechnet sich gemäß der EINSTEINschen Relation zu

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}.$$

Wie oben in 5.4. erwähnt, entspricht dem Massendefekt von einer Kernmasseneinheit ME (= Nukleonenmasse) eine Energie von 931,8 MeV. Demzufolge gilt für den mit der Energiedifferenz $\Delta E = 17{,}28$ MeV verbundenen Massendefekt

$$\Delta m = \frac{17{,}28 \text{ MeV}}{931{,}8 \dfrac{\text{MeV}}{\text{u}}} = 0{,}01854 \text{ u}.$$

Für die Kernmasse des angegebenen Lithiumisotops finden wir also

$$m_{Li} = 0{,}01854 \text{ u} - 1{,}00813 \text{ u} + 8{,}00772 \text{ u} = \underline{7{,}01813 \text{ u}}.$$

176. Die Quanten der harten Gammastrahlung des Radiothors können bei der Wechselwirkung mit einem Deuteriumkern diesen zur Zerlegung in Proton und Neutron entsprechend der Reaktion

$$^2_1\text{D} + \gamma \rightarrow {}^1_1\text{H} + {}^1_0\text{n}$$

bringen. Bei der Zerlegung erhält das Proton die kinetische Energie $\Delta E_1 = 0{,}217$ MeV. Die Energie der einfallenden γ-Quanten beträgt $\Delta E_2 = 2{,}62$ MeV. Die Massen von Proton und Deuteron sind bekannt. Berechnen Sie die Masse des Neutrons.

Lösung

Im Verlauf dieser Reaktion tritt ein Massendefekt

$$\Delta m = m_D - (m_H + m_n)$$

auf, wobei m_D, m_H und m_n die Ruhmassen von Deuteron, Proton bzw. Neutron bedeuten. Zwischen ihnen besteht der Zusammenhang

$$m_n = m_D - m_H - \Delta m. \quad (1)$$

Wir können voraussetzen, daß die Massen von Proton und Neutron nur unwesentlich voneinander abweichen. Deshalb werden die beiden Zerlegungsprodukte des Deuterons, Proton und Neutron, praktisch die gleiche Energie haben. Bei der Reaktion wird die

Energie

$$\Delta E = 2\Delta E_1 - \Delta E_2$$

frei. Dieser Energiedifferenz entspricht ein Massendefekt

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}.$$

Demnach ergibt sich für die Masse des Neutrons nach Gl. (1)

$$m_n = m_D - m_H - \frac{2\Delta E_1 - \Delta E_2}{c^2}.$$

Nach Einsetzen der bekannten Größen erhalten wir

$$m_n = 2{,}01472\,\mathrm{u} - 1{,}00813\,\mathrm{u} + \frac{2{,}186\,\mathrm{MeV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{MeV}}}{9 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß die Kernmasseneinheit gleich $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg ist, erhalten wir für die Neutronenmasse

$$m_n = 1{,}00659\,\mathrm{u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{u}} + 0{,}389 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{kg} = \underline{1{,}6748 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}.$$

177. Berechnen Sie die Bindungsenergie a) für ein Deuteron, b) für ein α-Teilchen.

Lösung

Ein Ausdruck für die Bindungsenergie ist der bei der Bildung der angegebenen Teilchen aus ihren elementaren Bestandteilen auftretende Massendefekt. Massendefekt und Bindungsenergie stehen in dem einfachen Zusammenhang

$$\Delta E = \Delta m c^2. \tag{1}$$

a) Das Deuteron ist der Kern des schweren Wasserstoffisotops, der sich aus je einem Proton und Neutron aufbaut. Wir bezeichnen mit m_p, m_n und m_D die Massen von Proton, Neutron und Deuteron und erhalten für den bei der Bildung des Deuterons auftretenden Massendefekt den Ausdruck

$$\Delta m = m_n + m_p - m_D = 1{,}00895\,\mathrm{u} + 1{,}00758\,\mathrm{u} - 2{,}01418\,\mathrm{u} =$$
$$= 0{,}00235\,\mathrm{u}.$$

Gemäß dem Zusammenhang in Gl. (1) entspricht einer Kernmasseneinheit u eine Energie von 931,8 MeV; daraus folgt, daß dem Massendefekt Δm die Bindungsenergie

$$\Delta E = 0{,}00235\,\mathrm{u} \cdot 931{,}8\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{u}} = \underline{2{,}19\,\mathrm{MeV}}$$

zukommt.

b) Das α-Teilchen ist der Kern des Heliumatoms; es besteht aus je zwei Protonen und Neutronen. Bei seiner Bildung tritt ein Massendefekt

$$\Delta m = 2m_n + 2m_p - m_\alpha$$

auf. In Zahlen ausgedrückt, hat er den Wert

$$\Delta m = 2{,}01790\,\mathrm{u} + 2{,}01516\,\mathrm{u} - 4{,}00276\,\mathrm{u} = 0{,}0303\,\mathrm{u}.$$

Damit ergibt sich für das α-Teilchen eine Bindungsenergie

$$\Delta E = 0{,}0303\,\mathrm{u} \cdot 931{,}8\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{u}} = \underline{28{,}2\,\mathrm{MeV}.}$$

178. Radon wird durch radioaktiven Zerfall des Radiumisotops $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ gebildet. Dabei emittiert der Radiumkern ein α-Teilchen der Energie $\Delta E = 4{,}9$ MeV. Der der Bindungsenergie des α-Teilchens zukommende Massendefekt hat den Wert $\Delta m = 0{,}0303$ u. Berechnen Sie aus den vorgegebenen Angaben die Differenz der Massendefekte von Mutterkern (Radium) und Tochterkern (Radon).

Lösung

Da der Mutterkern $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ aus 88 Protonen und 138 Neutronen besteht, kommt ihm ein Massendefekt

$$\Delta m_{\mathrm{Ra}} = 88\,m_{\mathrm{p}} + 138\,m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{Ra}}$$

zu. Dagegen hat der Massendefekt des Tochterkerns $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$, der aus 86 Protonen und 136 Neutronen besteht, den Wert

$$\Delta m_{\mathrm{Rn}} = 86\,m_{\mathrm{p}} + 136\,m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{Rn}}.$$

Die beiden Massendefekte unterscheiden sich somit um

$$\Delta m = \Delta m_{\mathrm{Ra}} - \Delta m_{\mathrm{Rn}} = 2m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{n}} - (m_{\mathrm{Ra}} - m_{\mathrm{Rn}}). \tag{1}$$

Bei der Umwandlung des Radiums in Radon entsprechend der Reaktion

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \longrightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\alpha \tag{2}$$

wird die Energie $\Delta E = 4{,}9$ MeV frei, die dem α-Teilchen zukommt. Dieser Energie entspricht ein Massendefekt

$$\Delta m' = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{4{,}9\,\mathrm{MeV}}{931{,}8\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{u}}} = 0{,}00526\,\mathrm{u}.$$

Wenn wir diesen Massendefekt mit der in Gl. (2) angegebenen Reaktion in Beziehung setzen, ergibt sich

$$\Delta m' = m_{\mathrm{Ra}} - (m_{\mathrm{Rn}} + m_{\alpha}).$$

Wir können mit Hilfe dieser Beziehung die Massendifferenz der Kerne $m_{\mathrm{Ra}} - m_{\mathrm{Rn}}$ ausdrücken und damit in Gl. (1) hineingehen. Das ergibt

$$\Delta m = 2m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{n}} - m_{\alpha} - \Delta m'.$$

Hierbei bedeutet $2m_p + 2m_n - m_\alpha$ den Massendefekt Δm_α, der bei der Bildung des α-Teilchens auftritt, in Zahlen:

$$\Delta m = \Delta m_\alpha - \Delta m' = 0{,}03030\,\mathrm{u} - 0{,}00526\,\mathrm{u} = \underline{0{,}025\,\mathrm{u}}.$$

179. Berechnen Sie, wie groß die Wellenlänge einer elektromagnetischen Strahlung höchstens sein darf, wenn diese Strahlung die Bildung von Elektron-Positron-Paaren verursachen soll.

Lösung

Paarbildung vollzieht sich durch die Wechselwirkung von genügend energiereichen Photonen im Feld schwerer Kerne. Die Ruhmasse des gebildeten Paares ist gleich der Summe der Ruhmassen von Elektron (m_e) und Positron (m_{e+}). Die Erzeugung dieser Ruhmassen erfolgt auf Kosten der Energie eines Photons. Der Zusammenhang zwischen den beteiligten Größen wird durch die EINSTEINsche Gleichung angegeben:

$$\Delta E = \Delta m c^2. \qquad (1)$$

Die Energie des Photons hat den Wert $\Delta E = h\nu$. Daraus folgt, wenn wir Gl. (1) umstellen, für die Frequenz des Photons

$$\nu = \frac{\Delta m c^2}{h},$$

und wegen der Beziehung $\lambda = c/\nu$ für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{\Delta m c}. \qquad (2)$$

Wenn wir die entsprechenden Größen einsetzen, ergibt sich

$$\Delta m = 5{,}489 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{u} + 5{,}489 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{u} = 10{,}978 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{u}.$$

Da eine Kernmasseneinheit gleich $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg ist, hat der oben errechnete Massendefekt, in absoluten Einheiten ausgedrückt, den Wert

$$\Delta m = 18{,}22 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}.$$

Diesen Wert in Gl. (2) eingesetzt, ergibt die erforderliche Höchstwellenlänge

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{18{,}22 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 12 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m} = \underline{1{,}2\,\mathrm{pm}}.$$

180. Urankerne des Isotops $^{235}_{92}\mathrm{U}$ zerlegen sich unter Beschuß mit thermischen (langsamen) Neutronen exotherm in 2 annähernd gleich schwere Kernbruchstücke. Bei dieser Art Kernspaltung wird eine Energiemenge von ungefähr $\Delta E = 200$ MeV freigesetzt. Berechnen Sie, welche Energiemenge bei der vollständigen Spaltung von 1 kg Uran freigesetzt würde. Berechnen Sie, welche Masse an spaltbarem Uranbrennstoff ein mit einer Leistung von 1 MW betriebener Kernreaktor innerhalb 24 Stunden verbrauchen würde.

Lösung

Bei der Spaltung von 1 kg Uran wird die Energie

$$E = n\, \Delta E \tag{1}$$

freigesetzt. Dabei ist ΔE die bei der Spaltung eines Kerns freigesetzte Energie und n die Zahl der in der Masseneinheit enthaltenen Urankerne. Für diese Zahl gilt

$$n = \frac{1000}{235} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}^{-1}.$$

Demnach ergibt sich die gesamte, bei der Spaltung von 1 kg Uran freigesetzte Energie zu

$$E = \frac{1000}{235}\, 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}^{-1} \cdot 200\ \mathrm{MeV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}\, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{MeV}} = \underline{8{,}2 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J\,kg}^{-1}}.$$

Unter der Voraussetzung eines idealen Wirkungsgrades würde der Reaktor bei einer Leistung $P = 1\ \mathrm{MW} = 10^6\ \mathrm{W}$ innerhalb von 24 Stunden die Energie

$$E_0 = 10^6\ \mathrm{W} \cdot 86400\ \mathrm{s} = 8{,}64 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

freisetzen. Da bei der Spaltung von 1 kg Uran die Energie $E = 8{,}2 \cdot 10^{13}$ J frei wird würde der Reaktor bei der angegebenen Leistung einen Brennstoffbedarf von

$$m = \frac{8{,}64 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}}{8{,}2 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J\,kg}^{-1}} = 1{,}05 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \approx \underline{1\ \mathrm{g\ Uran}\ ^{235}_{92}\mathrm{U}}$$

haben.

A Aufgaben

234. Als Endprodukt der Zerfallsreihe des Thoriums, die mit dem Isotop $^{232}_{90}\mathrm{Th}$ beginnt, erscheint das Bleiisotop $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$. Berechnen Sie die Zahl der im Verlauf der ganzen Zerfallsreihe emittierten α- und β-Teilchen.
235. Berechnen Sie, innerhalb welcher Zeit die Hälfte der Kerne eines Radiumpräparats zerfällt, wenn die Zerfallskonstante des betreffenden Radiums mit $\lambda = 1{,}42 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{s}^{-1}$ angegeben wird.
236. Berechnen Sie, wieviel Prozent der Kerne eines Poloniumpräparats mit der Halbwertzeit $T_{1/2} = 40$ min innerhalb von 5 min zerfallen.
237. Die Halbwertzeit eines Aktiniumisotops beträgt 13,5 a. Berechnen Sie, innerhalb welcher Zeit von 10^7 Kernen einer seinen Zerfall ausführt.
238. Berechnen Sie, wieviel α-Teilchen von einem Gramm Radium mit der Halbwertzeit $T_{1/2} = 1590$ a innerhalb einer Sekunde emittiert werden.
239. Entsprechend dem GEIGER-NUTTALLschen Reichweitegesetz kann man die Reichweite (d) eines von einem radio-

aktiven Präparat emittierten α-Teilchens mit der für dieses Präparat charakteristischen Zerfallskonstanten λ in Beziehung setzen. Das erfolgt angenähert durch die empirische Formel

$$\lg d = A \lg \lambda + B,$$

in der A und B Konstanten sind. Berechnen Sie die Reichweiten der α-Strahlung des Urans $^{238}_{92}U$ und des Radiums $^{226}_{88}Ra$, deren Halbwertzeiten bekannt sind. Für die Zerfallsreihe des Urans gelten die Zahlenwerte $A = 0{,}0167$ und $B = 0{,}7059$, wobei die Reichweite in cm und die Zerfallskonstante in s^{-1} gemessen sind.

240. Ein Poloniumpräparat der Aktivität $3{,}7 \cdot 10^{-11}\,s^{-1}$ befindet sich in einem Kalorimeter, dessen Wärmekapazität $4{,}19\,JK^{-1}$ beträgt. Die vom Polonium emittierten α-Teilchen haben eine Energie von 5,3 MeV. Die Rückstoßenergie der emittierten Kerne wird vernachlässigt. Berechnen Sie die im Kalorimeter innerhalb einer Stunde auftretende Temperaturerhöhung.

241. Durch natürlichen radioaktiven Zerfall des Uranisotops $^{238}_{92}U$ bildet sich das Uranisotop $^{234}_{92}U$. Das natürliche Uran ist ein Isotopengemisch von $^{238}_{92}U$, $^{235}_{92}U$ und $^{234}_{92}U$, das 99,3% des $^{238}_{92}U$-Isotops und nur 0,006% des $^{234}_{92}U$-Isotops enthält. Die Halbwertzeit des Uranisotops $^{238}_{92}U$ beträgt $4{,}4 \cdot 10^9$ Jahre. Berechnen Sie die Halbwertzeit des Uranisotops $^{234}_{92}U$.

242. Berechnen Sie, welches Volumen des radioaktiven Edelgases Radon sich bei einer Temperatur von 0 °C und einem Druck von 1 bar mit der Menge von 1 g Radium im radioaktiven Gleichgewicht befindet.

243. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich ein frei beweglicher Kern des Radiums nach der Emission eines α-Teilchens von der Energie $E_\alpha = 4{,}7$ MeV bewegen wird.

244. Berechnen Sie – in J und eV ausgedrückt –, welcher Energie die nukleare Masseneinheit ME entspricht.

245. Berechnen Sie die bei der Kernreaktion

$$^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{30}_{14}Si + {}^{1}_{1}H$$

frei werdende Energiemenge. Die Kernmassen betragen: $m_{Al} = 26{,}9899$ u, $m_{Si} = 29{,}9832$ u.

246. Berechnen Sie den auf das Mol bezogenen Massendefekt, der bei der chemischen Reaktion

$$2\,H_2 + O_2 \rightarrow 2\,H_2O$$

eintritt, wenn bei einer Reaktionstemperatur von 25 °C je Mol entstehenden Wassers eine Energie vom Betrag $W = 286$ kJ frei wird.

247. Im Verlauf der Kernreaktion

$$^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}H$$

wird ein Energiebetrag von 0,6 MeV freigesetzt. Die Kernmasse des Stickstoffisotops $^{14}_{7}N$ beträgt 14,00756 u. Berechnen Sie die Kernmasse des Kohlenstoffisotops $^{14}_{6}C$.

248. Im Verlauf der Kernreaktion

$$^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \longrightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O$$

wird je Grammatom des gebildeten Sauerstoffisotops eine Energiezufuhr von $12{,}5 \cdot 10^{10}$ J notwendig. Die Kernmasse des Stickstoffisotops $^{14}_{7}N$ beträgt 14,00756 u. Wie groß ist demnach die Kernmasse des Sauerstoffisotops $^{17}_{8}O$?

249. Berechnen Sie die Bindungsenergie der Kerne a) des Stickstoffisotops $^{14}_{7}N$, b) des Bleiisotops $^{207}_{82}Pb$. Wie groß ist die jeweils auf ein Nukleon bezogene Bindungsenergie? Die Kernmassen der genannten Isotope betragen 14,00756 u für $^{14}_{7}N$, 207,21 ME für $^{207}_{82}Pb$.

250. Berechnen Sie den bei der Bildung von einem Gramm Helium aus Protonen und Neutronen frei werdenden Energiebetrag.

4. *Quantentheorie*

4.1. Welleneigenschaften der Materie

Von DAVISSON und GERMER wurde 1927 nachgewiesen, daß auch Teilchen, die mit einer Ruhmasse behaftet sind, Welleneigenschaften zeigen können. Sie untersuchten die Reflexion von Elektronen an einem Nickel-Einkristall und fanden, daß die Elektronen entsprechend wellenoptischen Gesetzmäßigkeiten gestreut wurden (Bild 110). Mit diesem Experiment wurde eine 1924 von DE BROGLIE aufgestellte Hypothese bestätigt, wonach jedes sich frei bewegende Teilchen mit einer ebenen Welle der Form

$$\Psi(\vec{r}, t) = C\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

verknüpft ist ($\vec{r}$ Ortsvektor, t Zeit). Die Amplitude C der **de-Broglie-Welle** bleibt vorläufig unbestimmt.

Im Falle, daß sich die DE-BROGLIE-Welle im Vakuum ausbreitet, sind ihre Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ und ihr *Wellenzahlvektor* $\vec{k}$ mit der Energie E und dem Impuls $\vec{p}$ des Teilchens durch die *de-Broglieschen Gleichungen*

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

E *Elektronenquelle*
IK *Ionisationskammer*
K *Kristall*

Bild 110. Versuch von DAVISSON und GERMER

verknüpft. Wellenzahlvektor $\vec{k}$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$ sind demnach gleichgerichtet. Mit der Wellenzahl k ist gemäß der Beziehung $|\vec{k}| = 2\pi \frac{1}{\lambda}$ auch die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle bestimmt. Die Konstante $\hbar$ hat den Wert

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}.$$

($h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js PLANCKsches Wirkungsquantum).

In einem Kristall ist die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle vom **Gitterpotential** E_p abhängig. Bei einem Übertritt der DE-BROGLIE-Wellen aus dem Vakuum in den Kristall gilt für die Brechzahl n die Beziehung (Bild 111)

$$n = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \bar{\varepsilon}} = \sqrt{1 - \frac{E_{pot}}{E}}.$$

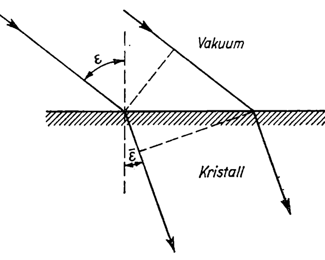


Bild 111

Aus den Welleneigenschaften der Materie haben wir nach SCHRÖDINGER und HEISENBERG die Konsequenz zu ziehen, daß sich die Quanten- oder Wellenmechanik als Mechanik der atomaren Prozesse in ihren Grundlagen und Vorstellungen gegenüber der klassischen Mechanik prinzipiell unterscheidet. Insbesondere läßt sich der Begriff der Bahnkurve eines Teilchens aus der klassischen Mechanik nicht in die Quantentheorie übertragen. An die Stelle genau fixierter Größen für die Ortskoordinate q und die Impulskoordinate p eines Teilchens tritt in der Wellenmechanik eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung*. Orts- und Impulskoordinate sind demzufolge mit prinzipiellen Ungenauigkeiten Δq und Δp behaftet. Nach HEISENBERG besteht zwischen diesen Ungenauigkeiten der Zusammenhang

$$\overline{\Delta p^2}\,\overline{\Delta q^2} \geqq \frac{\hbar^2}{4},$$

der auch in der Form

$$\Delta p\, \Delta q \approx h$$

geschrieben wird.

Durch diese **Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation** wird weder die Genauigkeit der Ortsbestimmung noch die der Impulsbestimmung für sich allein begrenzt. Eine Beschränkung besteht dagegen insofern, als die genauere Bestimmung der einen Größe unvermeidlich mit einer Zunahme des Fehlers der *konjugierten Größe* verbunden ist.

B Beispiele

181. Das Wasserstoffatom hat die Masse $m_H = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg. Wie groß ist die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle des Teilchens, wenn es sich mit der Geschwindigkeit $v \doteq 1000\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ bewegt?

Lösung

Die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle bestimmt sich aus der Beziehung

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

Hieraus folgt

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{3}}\,\mathrm{m} = \underline{3{,}96 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}.}$$

Die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle liegt also in der Größenordnung des Atomdurchmessers.

182. Ein Elektron bewegt sich im homogenen elektrischen Feld. Die das Elektron beschleunigende Potentialdifferenz hat den Wert $U = 1000$ V. Es wird vorausgesetzt, daß die resultierende Endgeschwindigkeit des Elektrons klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c bleibt, so daß ohne Berücksichtigung relativistischer Korrekturglieder gerechnet werden kann.
Wegen $v \ll c$ kann die Masse des Elektrons mit seiner Ruhmasse $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg gleichgesetzt werden. Die Elementarladung des Elektrons ist $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As. Wie groß ist die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle des Elektrons am Ende des Beschleunigungsvorgangs?

Lösung

Für die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle des Elektrons gilt

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

Zwischen der Geschwindigkeit des Elektrons und seiner kinetischen Energie besteht der Zusammenhang

$$E_k = \frac{m}{2} v^2;$$

andererseits ist die kinetische Energie gemäß $E_k = eU$ durch die Potentialdifferenz des vorliegenden elektrischen Feldes bestimmt. Hieraus erhalten wir für die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}.$$

Setzt man für h, m, e die gegebenen Größen ein, so folgt

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ U/\mathrm{Volt}}}\,\mathrm{m} = \frac{1{,}225 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{U/\mathrm{Volt}}}\,\mathrm{m},$$

womit eine allgemeine Zahlenwertgleichung für die Abhängigkeit der Wellenlänge von der Potentialdifferenz U in Volt gefunden ist. Setzt man für U den Zahlenwert 10^3 ein, ergibt sich schließlich

$$\lambda = \frac{1{,}225 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{10^3}}\,\mathrm{m} = \underline{0{,}387 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}}.$$

183. Es ist die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle eines Elektrons im starken elektrischen Feld $U = 10^5$ V zu bestimmen. Dabei sind die *relativistischen Korrekturglieder* in erster Näherung zu berücksichtigen, wobei für den Impuls $\vec{p}$ und für die kinetische Energie E_k die Ausdrücke $\vec{p} = m\vec{v}$, $E_k = (m - m_0)c^2$ zu verwenden sind (vgl. Beispiel 149!).

Lösung

Nach den DE-BROGLIEschen Grundgleichungen besteht zwischen dem Betrag des Impulses $\vec{p}$ und der Wellenlänge λ die Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{p}. \tag{1}$$

Andererseits ist

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

Für nicht zu große Werte der Geschwindigkeit v können wir schreiben

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{v^2}{2c^2} \tag{3}$$

und erhalten damit

$$p = \frac{m_0 v}{1 - \frac{v^2}{2c^2}}. \tag{4}$$

Wir beachten den Zusammenhang zwischen kinetischer Energie E_k und Potentialdifferenz U:

$$E_k = (m - m_0)\,c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) m_0 c^2 = eU \tag{5}$$

und finden

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{eU + m_0 c^2}. \tag{6}$$

Daraus erhalten wir durch Umformung

$$v = \frac{\sqrt{e^2U^2 + 2m_0c^2\,eU}}{eU + m_0c^2}\,c.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß

$$eU \ll m_0 c^2$$

ist, so läßt sich die Geschwindigkeit v auch schreiben

$$v = \frac{\sqrt{2m_0c^2eU\left(1+\dfrac{eU}{2m_0c^2}\right)}}{m_0c^2\left(1+\dfrac{eU}{m_0c^2}\right)}\,c = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}\,c\left(1-\frac{3eU}{4m_0c^2}\right). \tag{7}$$

Aus den Gln. (1), (4), (7) ergibt sich für die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{h}{\sqrt{2m_0eU}}\left(1-\frac{eU}{4m_0c^2}\right). \tag{8}$$

Wir setzen die bekannten Werte für die Konstanten m_0, e, h und c in Gl. (8) ein und erhalten

$$\lambda = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,U}}\left(1-\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\,U}{4\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16}}\right)\mathrm{m} =$$

$$= \frac{1{,}225\cdot 10^{-9}}{\sqrt{U}}(1-0{,}49\cdot 10^{-6}\,U)\,\mathrm{m}. \tag{9}$$

Für die angegebene Potentialdifferenz $U = 10^5$ V ergibt sich

$$\lambda = \frac{1{,}225\cdot 10^{-9}}{\sqrt{10^5}}(1\;-\;0{,}049)\,\mathrm{m} = \underline{0{,}368\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}}.$$

184. Es ist die Beziehung für die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle des Protons im starken elektrischen Feld zahlenwertmäßig aufzustellen, wobei die relativistischen Korrekturen in erster Näherung zu berücksichtigen sind. Welche Grenzen ergeben sich für die Spannung, wenn die Gültigkeit der entwickelten Formel auf Werte des Korrekturgliedes zwischen 0,1 % und 10 % des Hauptgliedes begrenzt ist? Für die Ruhmasse des Protons ist $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg zu setzen.

Lösung

Wir gehen von Gl. (8) in Beispiel 183 aus. An die Stelle der Ruhmasse m_0 des Elektrons tritt aber die des Protons m_p. Das Verhältnis beider Massen ist

$$\frac{m_p}{m_0} = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}}{0{,}91\cdot 10^{-30}} = 1836.$$

Unter Bezugnahme auf Gl. (9) in Beispiel 183 erhalten wir somit

$$\lambda = \frac{1{,}225\cdot 10^{-9}}{\sqrt{1836\,U}}\left(1\;-\;0{,}49\cdot 10^{-6}\,\frac{U}{1836}\right)\mathrm{m},$$

bzw.

$$\lambda = \frac{2{,}87 \cdot 10^{-11}}{\sqrt{U}} (1 - 0{,}27 \cdot 10^{-9}\, U)\ \text{m}.$$

Wenn das Korrekturglied $0{,}27 \cdot 10^{-9}\, U$ im Bereich

$$0{,}001 \leqq 0{,}27 \cdot 10^{-9}\, U \leqq 0{,}1$$

liegen soll, so muß die Spannung U ihrerseits Werte zwischen $3{,}7 \cdot 10^6$ V und $3{,}7 \cdot 10^8$ V annehmen. Unterhalb einer Beschleunigungsspannung von $3{,}7 \cdot 10^6$ V kann somit eine relativistische Korrektur des Protons vernachlässigt werden. Dagegen müssen oberhalb einer Spannung von $3{,}7 \cdot 10^8$ V Korrekturglieder höherer Ordnung in die Berechnung einbezogen werden.

185. Aus den DE-BROGLIEschen und aus den relativistischen Grundgleichungen ist der Zusammenhang zwischen der *Phasengeschwindigkeit* $u = \lambda\nu$ einer DE-BROGLIE-Welle und der Geschwindigkeit v des substantiellen Teilchens abzuleiten. Wie groß sind Phasengeschwindigkeit und *Teilchengeschwindigkeit* für ein Elektron, das seine kinetische Energie im elektrischen Feld der Potentialdifferenz $U = 100$ V erhält?

Lösung

Es werden die relativistischen Grundgleichungen

$$E = mc^2, \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

und die DE-BROGLIEschen Gleichungen in der Form

$$E = \hbar\omega = h\nu, \quad p = mv = \frac{h}{\lambda}$$

herangezogen. Aus den letzten beiden Beziehungen ergibt sich

$$\nu = \frac{E}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{p}.$$

Damit erhalten wir

$$u = \lambda\nu = \frac{E}{p}$$

und unter Verwendung der relativistischen Grundgleichungen

$$u = \frac{mc^2}{mv} \quad \text{bzw.} \quad uv = c^2.$$

Da entsprechend der Relativitätstheorie für die Geschwindigkeit v eines materiellen Teilchens die Beziehung

$$v \leqq c$$

gelten muß, folgt für die Phasengeschwindigkeit $u = \lambda\nu$ der DE-BROGLIE-Welle

$$u \geqq c.$$

Für den Fall eines Elektrons im elektrischen Feld $U = 100$ V erhalten wir aus

$$E_k = \frac{m_0}{2} v^2 = eU$$

die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m_0} U} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}}\, U \mathrm{ms}^{-1} = 0{,}593 \cdot 10^6 \sqrt{U} \mathrm{ms}^{-1},$$

d. h.,

$$\underline{v = 0{,}593 \cdot 10^7 \mathrm{~m~s}^{-1}}.$$

Hieraus ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit

$$u = \frac{c^2}{v} = \frac{9 \cdot 10^{16}}{0{,}593 \cdot 10^7} \mathrm{~m~s}^{-1} = \underline{1{,}52 \cdot 10^{10} \mathrm{~m~s}^{-1}}.$$

186. Berechnen Sie die Wellenlänge einer DE-BROGLIE-Welle von Elektronen in einem Kristall. Das Gitterpotential des Kristalls hat den Wert $E_p = -15$ eV, die betrachteten Elektronen haben im Vakuum eine kinetische Energie von 100 eV.

Lösung

Im Fall nichtrelativistischer Rechnung gilt für die Gesamtenergie der Teilchen im Vakuum

$$E = \frac{m_0}{2} v^2 \tag{1}$$

und im Kristall

$$E = E_p + \frac{m_0}{2} \bar{v}^2 \tag{2}$$

Dabei gibt $\bar{v}$ die Geschwindigkeit der materiellen Teilchen im Kristall an. Aus Gl. (1) u. (2) folgt für die jeweiligen Geschwindigkeiten

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_0}}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{2(E - E_p)}{m_0}} \tag{3}$$

und daraus wegen $u = \lambda \nu = c^2/v$ für das Verhältnis der Phasengeschwindigkeiten

$$n = \frac{u}{\bar{u}} = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} = \sqrt{\frac{E - E_p}{E}} = \sqrt{1 - \frac{E_p}{E}}, \tag{4}$$

wobei n als die Brechzahl der DE-BROGLIE-Welle zu bezeichnen ist. Für die Wellenlänge $\bar{\lambda}$ der DE-BROGLIE-Welle im Kristall erhalten wir demnach

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{n} = \lambda \sqrt{\frac{E}{E - E_p}}. \tag{5}$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich aus Gl. (4) die Brechzahl zu

$$n = \sqrt{\frac{100 + 15}{100}} = 1{,}072.$$

Die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle im Vakuum ergibt sich zu

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}. \tag{6}$$

Wir berücksichtigen die Umrechnung

$$1\ \text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

und erhalten für die Wellenlänge im Vakuum

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 100 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}}\ \text{m} = 12{,}2 \cdot 10^{-11}\ \text{m}.$$

Für die Wellenlänge im Kristall erhalten wir

$$\bar{\lambda} = \frac{12{,}2}{1{,}072}\, 10^{-11}\ \text{m} = \underline{11{,}4 \cdot 10^{-11}\ \text{m}}.$$

187. Röntgenstrahlen und DE-BROGLIE-Wellen gleicher *Vakuum-Wellenlänge* λ zeigen bei einem Übergang zwischen Vakuum und Kristall unterschiedliches Brechungsverhalten. Während der Röntgenstrahl praktisch keine Brechung erfährt, erfolgt für den Elektronenstrahl eine Brechung gemäß

$$n = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \bar{\varepsilon}}$$

(Bild 112). Aus der hierdurch sich ergebenden Zuordnung von Röntgenstrahlen und gebeugten Elektronenstrahlen werde eine Brechzahl $n = 1{,}044$ gemessen. Die Wellenlänge im Vakuum beträgt $\lambda = 10^{-10}$ m. Welcher Wert folgt daraus für das Gitterpotential?

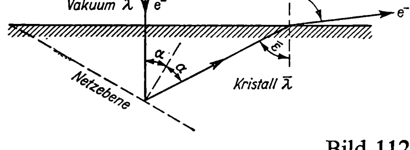


Bild 112

Lösung

Zwischen der gemessenen Wellenlänge λ und dem Potential U des beschleunigenden elektrischen Feldes besteht die Beziehung (vgl. Beispiel 182)

$$\lambda = \frac{1{,}225 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{U}}\ \text{m},$$

woraus folgt

$$U = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-18}}{\lambda^2}\ \text{V}.$$

Im vorgegebenen Falle $\lambda = 10^{-10}$ m ergibt sich demnach eine kinetische Energie der Elektronen von

$$E_k = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-18}}{10^{-20}} \text{eV} = 150 \text{eV},$$

die mit der Gesamtenergie E identisch ist.
Aus

$$n = \sqrt{1 - \frac{E_p}{E}}$$

folgt für das gesuchte Gitterpotential

$$E_p = E\,(1 - n^2),$$

d. h.,

$$E_p = 150\,(1 - 1{,}044^2)\,\text{eV} = -150 \cdot 0{,}09 \text{ eV} = \underline{-13{,}5 \text{ eV}.}$$

188. Ein Elektronenstrahl falle senkrecht auf einen Spalt Sp der Breite $a = 0{,}1$ µm und werde an diesem gebeugt. Es soll die Ungenauigkeit bei der Festlegung der Geschwindigkeit bestimmt werden. Dabei können alle Teilchen, die außerhalb des ersten Beugungsminimums liegen, unberücksichtigt bleiben.

Lösung

Die Ausbreitungsrichtung vor dem Spalt Sp wählen wir als z-Achse; die Spaltebene wird als x,y-Ebene festgelegt (Bild 113). Der Teilchenimpuls vor dem Spalt hat deshalb die Komponenten

$$\bar{p}_x = 0, \quad \bar{p}_y = 0, \quad \bar{p}_z = p.$$

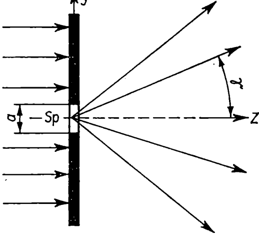


Bild 113

Beim Durchgang durch den Spalt wird die DE-BROGLIE-Welle gebeugt, d. h., der Teilchenimpuls wird verändert. Für die in der y,z-Ebene liegenden Strahlen ergibt sich gemäß den Aussagen der Beugungsoptik das erste Beugungsminimum aus

$$\sin \gamma_{\min} = \pm \frac{\lambda}{a}$$

(λ Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle). Für die Strahlen in der y,z-Ebene gilt

$$p_y = p \sin \gamma.$$

Die zu berücksichtigenden Teilchen haben demnach Impulse mit y-Komponenten im Bereich

$$-p \sin \gamma_{\min} = -\frac{p\lambda}{a} \cdots + \frac{p\lambda}{a} = p \sin \gamma_{\min}.$$

Nach den DE-BROGLIEschen Gleichungen ist

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

somit folgt

$$\Delta p_y = p \sin \gamma_{\min} = \frac{h}{\lambda}\,\frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a}.$$

Ferner ist die Ungenauigkeit des Ortes durch die Spaltbreite bestimmt, d. h., es gilt

$$\Delta y = a.$$

Somit folgt

$$\Delta p_y\,\Delta y = h.$$

Da $p = mv$ ist, ergibt sich auch $\Delta p = m\Delta v$. Daraus erhalten wir schließlich

$$\Delta v_y = \frac{h}{m\Delta y} = \frac{h}{ma} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-7}}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \underline{727\,\mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

189. Bei der Untersuchung des MÖSSBAUER-*Effekts* wird häufig die Strahlung des ^{57}Fe-Kernes beobachtet. Dieser Kern emittiert beim Übergang vom ersten angeregten Kernniveau eine γ-Strahlung der Energie $E = 14{,}4$ keV. Welcher Mindestwert ergibt sich nach der HEISENBERGschen Unschärferelation für die Meßzeit Δt, in deren Verlauf eine Entscheidung über eine erfolgte Emission nicht möglich ist?

Lösung

In die HEISENBERGsche Unschärferelation

$$\Delta p \Delta q \approx h$$

wird $\Delta q = v\Delta t$ eingesetzt.
Aus der relativistischen Massenveränderlichkeit

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

erhalten wir die Beziehung

$$m_0^2 = m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

und daraus für die Gesamtenergie

$$E^2 = m^2c^4 = m_0^2c^4 + m^2v^2c^2 = (m_0^2c^2 + p^2)\,c^2.$$

Hieraus finden wir durch Differentiation ($\Delta E = \mathrm{d}E$, $\Delta p = \mathrm{d}p$ gesetzt)

$$2E\Delta E = 2c^2 p\Delta p, \quad \Delta p = \frac{E\Delta E}{c^2 p}.$$

Mit $E = mc^2$ und $p = mv$ ergibt sich

$$\Delta q\,\Delta p = v\,\Delta t\,\frac{E\Delta E}{c^2 p} = \Delta t\,\Delta E \approx h.$$

Wir setzen die gegebenen Größen ein

$$\Delta E = E = 14{,}4\,\mathrm{keV} = 14{,}4\cdot 10^3\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 2{,}3\cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}$$

und finden für die Emissionszeit den Wert

$$\Delta t \approx \frac{h}{\Delta E} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}}{2{,}3\cdot 10^{-15}}\,\mathrm{s} = \underline{2{,}8\cdot 10^{-19}\,\mathrm{s}.}$$

190. Entsprechend der *Hypothese von* March-Foradori gibt es sowohl eine **Elementarlänge** (kleinste Länge)

$$l_0 \approx 3\cdot 10^{-15}\,\mathrm{m},$$

als auch eine **Elementarzeit**

$$t_0 = \frac{l_0}{c} \approx 10^{-23}\,\mathrm{s}.$$

Welche oberen Grenzen ergeben sich aus dieser Hypothese für Impuls- und Energieänderungen bei elementaren Prozessen, wenn man die Heisenbergsche Unschärferelation in der Form $\Delta p\Delta q \approx h$ voraussetzt?

Lösung

Orts- und Zeitmessungen sind mit Fehlern behaftet, die mindestens $\pm l_0$ bzw. $\pm t_0$ betragen. Hieraus folgt

$$\Delta q \geqq 2l_0, \quad \Delta t \geqq 2t_0.$$

Aus der Heisenbergschen Unschärferelation ergibt sich damit

$$h \approx \Delta p\,\Delta q \geqq \Delta p\,2l_0$$

und daraus für eine Impulsänderung

$$\Delta p \leqq \frac{h}{2l_0} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{2\cdot 3\cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}} \approx \underline{10^{-19}\,\mathrm{kgm\,s^{-1}}.}$$

Ebenso folgt

$$h \approx \Delta E\,\Delta t \geqq \Delta E\,2t_0,$$

und damit für die Energieänderung

$$\Delta E \lessapprox \frac{h}{2t_0} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{2 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{s}} \approx \underline{3 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}.}$$

In anderen Einheiten ausgedrückt finden wir

$$3 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J} = 3 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{12}\ \mathrm{MeV} \approx 200\ \mathrm{MeV}.$$

Dieser Wert entspricht der größten experimentell bekanntgewordenen Energieausbeute bei einem Elementarprozeß.

191. Nach MARCH besteht zwischen der Impulsänderung Δp und der hierdurch bedingten Energieänderung ein Zusammenhang der Form

$$\left| c^2 |\Delta p|^2 - |\Delta E|^2 \right| \leqq \left(\frac{hc}{2l_0} \right)^2. \tag{1}$$

Es ist zu berechnen, welche obere Grenze sich daraus für die Energie eines Quants der Elektronenbremsstrahlung ergibt.

Lösung

Für die Elektronenbremsstrahlung gilt die Beziehung

$$eU = (m - m_0)\, c^2 = \frac{m_0}{2}\, v^2 = h\nu_{\max}. \tag{2}$$

(m Masse, m_0 Ruhmasse des Elektrons, $\nu_{\max}$ obere Grenze der ausgestrahlten Frequenz, U Potentialdifferenz des Beschleunigungsfeldes).
Die bei der Abbremsung eines Elektrons maximal auftretenden Werte der Impuls- bzw. der Energieänderung sind

$$\Delta p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

und

$$\Delta E = E_\mathrm{k} = (m - m_0)\, c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \tag{4}$$

Wenn wir diese Ausdrücke in Gl. (1) von MARCH einsetzen, ergibt sich

$$c^2 |\Delta p|^2 - |\Delta E|^2 = m_0 c^2 \left[\frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - c^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + 1 - \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \right] =$$

$$= 2 m_0^2 c^4 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right), \tag{5}$$

d. h.,

$$c^2\,|\Delta p|^2 - |\Delta E|^2 = 2m_0^2c^4\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) < \left(\frac{hc}{2l_0}\right)^2. \tag{6}$$

Aus dem Vergleich von Gl. (4) u. (6) erhalten wir

$$\Delta E = E_k = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) < \frac{1}{2m_0}\left(\frac{h}{2l_0}\right)^2, \tag{7}$$

d. h., für die bei der Elektronenbremsstrahlung frei werdende Energie gilt die Ungleichung

$$\Delta E < \frac{h^2}{8m_0l_0^2} = \frac{(6{,}63\cdot 10^{-34})^2}{8\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,(3\cdot 10^{-15})^2}\ \mathrm{J} = 6{,}72\cdot 10^{-9}\ \mathrm{J} = \underline{4{,}2\cdot 10^4\ \mathrm{MeV}}.$$

Hiernach muß die Anfangsenergie von Elektronen bei der Bremsstrahlung unterhalb einer Grenze von rd. 10^5 MeV liegen.

192. Es sind die *strahlungsfreien Kreisbahnen* im BOHRschen Atommodell, die zugehörigen Umlauffrequenzen und die Gesamtenergie E zu berechnen. Dabei ist vorauszusetzen, daß die DE-BROGLIEschen Gleichungen für freie Teilchen auch für die im Atom gebundenen Elektronen gültig sind und daß nur solche Bahnen möglich sind, auf denen die DE-BROGLIEsche Welle längs der Kreisbahn mit sich selbst zur Interferenz kommt.

Lösung

Die DE-BROGLIEsche Welle eines Elektrons kann nur dann entlang der gesamten Umlaufbahn mit sich selbst zur Interferenz kommen, wenn deren Länge ein ganzzahliges Vielfaches der DE-BROGLIE-Wellenlänge λ ist. Hieraus folgt für die möglichen Bahnradien r die Beziehung

$$2\pi r = n\lambda, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Setzt man hierin die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle des Elektrons aus

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \tag{2}$$

ein, so folgt mit $v = r\omega$ (ω Kreisfrequenz)

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mr\omega} \tag{3}$$

und weiter aus Gl. (1) u. (3)

$$2\pi r = n\,\frac{h}{p} = \frac{nh}{mr\omega} \quad \text{bzw.} \quad 2\pi rp = \oint p\,\mathrm{d}q = nh. \tag{4}$$

Die letzte Gleichung drückt die Phasenintegralbedingung von BOHR aus.
Aus dem Zusammenhang von COULOMB-Kraft und Fliehkraft ergibt sich

$$\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = mr\omega^2 \tag{5}$$

($\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ As V^{-1} m^{-1} elektrische Feldkonstante, z Zahl der Elementarladungen im Kern). Löst man Gl. (4) u. Gl. (5) nach dem Bahnradius r und nach der Kreisfrequenz ω auf, so ergibt sich

$$r = r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 n^2}{ze^2 m}, \quad \omega = \omega_n = \frac{z^2 e^4 m}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 n^3 \hbar^3}. \tag{6}$$

Für die Gesamtenergie E folgt

$$E = \frac{m}{2} r^2\omega^2 - \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{z^2 e^4 m}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 n^2 \hbar^2}. \tag{7}$$

Setzt man die für das Wasserstoffatom geltenden Daten ein, so erhält man für den Grundzustand ($n = 1$)

$$r_1 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot (1{,}05 \cdot 10^{-34})^2}{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} \text{ m} = \underline{0{,}529 \cdot 10^{-10} \text{ m}},$$

$$\omega_1 = \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{16\,(3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (1{,}05 \cdot 10^{-34})^3} \text{ s}^{-1} = \underline{4{,}16 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}},$$

$$E_1 = -\frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{18}}{32\,(3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (1{,}05 \cdot 10^{-34})^2} \text{ eV} = \underline{-13{,}6 \text{ eV}.}$$

193. Nach der BOHR*schen Quantisierungsregel* gilt für jede Ortskoordinate q und für den dazugehörigen *verallgemeinerten Impuls*

$$p_q = \frac{\partial E_k}{\partial q}$$

die *Phasenintegralbedingung*

$$\oint p_q \, dq = n_q h, \qquad n_q = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Auf der Grundlage dieser BOHRschen Theorie ist nachzuweisen, daß auch auf einer elliptischen Umlaufbahn die Zahl der ihr entsprechenden DE-BROGLIE-Wellen ganzzahlig ist.

Lösung

Gemäß der BOHRschen Theorie gelten für die elliptischen Bahnen (Bild 114) die beiden Bedingungen

$$\oint p_r \, dr = n_r h, \qquad n_r = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\oint p_\varphi \, d\varphi = n_\varphi h, \qquad n_\varphi = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Dabei wird n_r als die *radiale*, n_φ als die *azimutale* Quantenzahl bezeichnet. Die verallgemeinerten Impulse sind durch die Beziehungen

$$p_r = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{r}}, \quad p_\varphi = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}$$

bestimmt. Für die kinetische Energie ergibt sich (Bild 115) demnach

$$E_k = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} (p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi}).$$

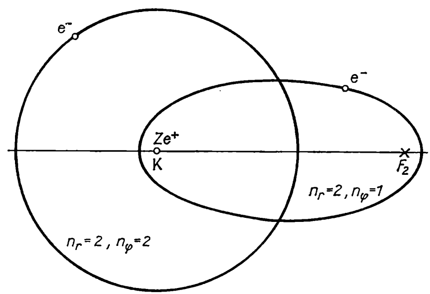


Bild 114. Darstellung der Quantenbahnen nach BOHR

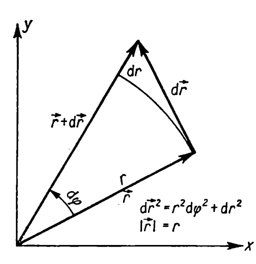


Bild 115

Damit erhält man aus den Phasenintegralbedingungen

$$\oint p_r \,\mathrm{d}r + \oint p_\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \oint (p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi}) \,\mathrm{d}t = 2 \oint E_k \mathrm{d}t = (n_r + n_\varphi)\, h.$$

Wenn wir die kinetische Energie in der Form

$$E_k = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} v \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

schreiben (s Länge der durchlaufenen Bahnkurve, v Bahngeschwindigkeit), dann erhalten wir aus

$$2 \oint E_k \,\mathrm{d}t = (n_r + n_\varphi)\, h = nh$$

die Beziehung

$$\oint mv \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t = \oint mv \,\mathrm{d}s = nh.$$

Durch Einsetzen der DE-BROGLIEschen Gleichung

$$p = mv = \frac{h}{\lambda}$$

erhalten wir das Resultat

$$\oint \mathrm{d}s = n\lambda, \qquad n = n_r + n_\varphi = 0, 1, 2, 3, \dots$$

194. Die elliptische Umlaufbahn eines Elektrons um einen Atomkern wird in Polarkoordinaten durch die Gleichung

$$r = \frac{p_0}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \tag{1}$$

dargestellt (Bild 116). Dabei bedeutet

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E (4\pi\varepsilon_0)^2}{z^2 e^4 m}} \tag{2}$$

die numerische Exzentrizität der Bahn,

$$p_0 = \frac{L^2 4\pi\varepsilon_0}{z e^2 m} \tag{3}$$

den Parameter der Ellipse, E die Gesamtenergie und

$$L = mr^2\dot{\varphi} = p_\varphi \tag{4}$$

den nach dem Flächensatz konstanten Drehimpuls.

F_1, F_2 Brennpunkte der Ellipse
$F_1O = OF_2 = e$
$PO = OA = a$
P_0 Ellipsenpunkt
P Perihel
A Aphel

Bild 116. Elliptische Umlaufbahn eines Elektrons um einen Atomkern

Es sind die sich aus den Bohrschen Quantisierungsbedingungen ergebenden Halbachsen a und b der Bahnellipse zu bestimmen. Welcher Ausdruck ergibt sich für die Gesamtenergie E?

Lösung

Die Bohrschen Quantisierungsbedingungen (s. Beispiel 193) lauten

$$\oint p_\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} L \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi L = n_\varphi h \quad \text{bzw.} \quad L = n_\varphi \hbar, \tag{5}$$

$$\oint p_r \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} p_r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \mathrm{d}\varphi = n_r h. \tag{6}$$

Dabei ist

$$p_r = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = m \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}. \tag{7}$$

Wenn wir die Gln. (7) u. (1) in Gl. (6) einsetzen, so finden wir

$$\oint p_r \,\mathrm{d}r = L \int \frac{1}{r^2} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \right)^2 \mathrm{d}\varphi = L\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi \,\mathrm{d}\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} = n_r h. \tag{8}$$

Die Auswertung des Integrals ergibt

$$2\pi L\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-1\right)=n_r h, \tag{9}$$

sowie unter Berücksichtigung von Gl. (5) nach Umformung

$$1-\varepsilon^2=\left(\frac{n_\varphi}{n_\varphi+n_r}\right)^2=\left(\frac{n_\varphi}{n}\right)^2 \tag{10}$$

mit $n_r + n_\varphi = n$. Aus Gl. (10) erhalten wir unter Hinzuziehung der Gln. (2) u. (5) einen Ausdruck für die Energie

$$\underline{E=-\frac{z^2e^4m}{8h^2\varepsilon_0^2n^2}}\,.$$

Demnach ist die Gesamtenergie E nur von der Hauptquantenzahl $n = n_r + n_\varphi$ abhängig. Es ergibt sich der gleiche Ausdruck wie bei der Annahme von Kreisbahnen. Zur Bestimmung der gesuchten Halbachsen erhalten wir nach Bild 116 aus Gl. (1) für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$

$$a-\sqrt{a^2-b^2}=\frac{p_0}{1+\varepsilon},\quad a+\sqrt{a^2-b^2}=\frac{p_0}{1-\varepsilon}$$

und daraus

$$a=\frac{p_0}{1-\varepsilon^2}=\frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{ze^2m} \tag{11}$$

sowie unter Verwendung von Gl. (10)

$$b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}=\frac{an_\varphi}{n}. \tag{12}$$

Die großen Halbachsen $a = a_n$ der Ellipsen stimmen hiernach mit den Radien der strahlungsfreien Kreisbahnen überein. Im Fall $n = 3$ ergibt sich für das Wasserstoffatom

$$a_3=\frac{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 9\,(1{,}05\cdot 10^{-34})^2}{(1{,}6\cdot 10^{-19})^2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}\,\mathrm{m}=\underline{4{,}74\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}},$$

$$b_{31}=4{,}74\cdot 10^{-10}\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{m}=\underline{1{,}58\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}},$$

$$b_{32}=4{,}74\cdot 10^{-10}\cdot\frac{2}{3}\,\mathrm{m}=\underline{3{,}16\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}},$$

$$b_{33}=\underline{4{,}74\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}}.$$

Der Sonderfall $n_\varphi = 0$ ist offensichtlich auszuschließen, denn er führt zu einer Pendelbewegung, bei der das Elektron durch den Atomkern hindurchgehen müßte.

A Aufgaben

251. Die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle eines Deuteriumatoms ist für den Fall zu bestimmen, daß die Geschwindigkeit des Teilchens $v = 400\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ beträgt. Die Masse des Deuteriumatoms ist $m_d = 3{,}34 \cdot 10^{-27}$ kg.
252. Wie groß wäre die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle eines Geschosses von 1 g Masse, das sich mit einer Geschwindigkeit $v = 100\ \mathrm{ms^{-1}}$ bewegt?
253. Es ist die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle eines Protons im elektrischen Feld zu bestimmen, dessen beschleunigendes Potential den Wert 1 V hat. Die Masse des Protons ist $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.
254. Berechnen Sie die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle eines Elektrons im elektrischen Feld mit der beschleunigenden Potentialdifferenz $U = 2{,}5 \cdot 10^5$ V.
255. Welche Potentiale sind erforderlich, damit die DE-BROGLIE-Welle eines Deuteriumatoms die Wellenlängen $\lambda_1 = 10^{-11}$ m, $\lambda_2 = 10^{-12}$ m und $\lambda_3 = 10^{-13}$ m annimmt?
256. Stellen Sie eine Formel auf, nach der die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle eines α-Teilchens in Abhängigkeit von der Feldspannung zu berechnen ist. Welche Wellenlänge ergibt sich demnach für die Spannung 10^6 V? $m_\alpha = 4m_p$, Ladung $Q = 2\,e^+$.
257. Berechnen Sie die Phasengeschwindigkeit der DE-BROGLIE-Welle für ein Elektron im elektrischen Feld der Spannung 1 kV.
258. Zur Messung des Gitterpotentials eines Nickelkristalls werden Elektronen der folgenden Energien betrachtet: $E = 160;\ 185;\ 210;\ 235;\ 260;\ 285$ eV. Für die gebrochene Welle werden dabei die folgenden Wellenlängen gemessen: $\lambda = (0{,}921;\ 0{,}861;\ 0{,}811;\ 0{,}769;\ 0{,}735;\ 0{,}703) \cdot 10^{-10}$ m. Wie groß sind die jeweils zugeordneten Röntgenwellenlängen? Welche Brechzahlen folgen daraus? Welche Gitterpotentiale ergeben sich? Geben Sie das mittlere Gitterpotential für Nickel an.
259. Bei der Reflexion eines Elektronenstrahls an einem Aluminiumgitter ($E_p = -17{,}0$ eV) soll sich eine Brechzahl $n = 1{,}2$ ergeben. Bestimmen Sie die dafür notwendige beschleunigende Potentialdifferenz sowie die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle der Elektronen.
260. Es werde vorausgesetzt, daß bis hinauf zu einer Geschwindigkeit $v = {}^1/_{10}\, c = 3 \cdot 10^7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ nichtrelativistisch gerechnet werden darf. Welcher Bereich der DE-BROGLIE-Wellen und welcher Spannungsbereich für Elektronen läßt sich damit erfassen?
261. Wie groß muß die Öffnung eines Spalts mindestens sein, damit bei der Beugung langsamer Elektronen, Neutronen, α-Teilchen, die prinzipielle Ungenauigkeit der Geschwindigkeitsbestimmung den Wert $\pm 100\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ nicht übersteigt?
262. Welche Spaltbreite müßte man wählen, wenn sich beim Durchgang von α-Strahlen und von β-Strahlen ein Beugungsfleck mit dem Radius $r = 1$ cm (1. Minimum) ergeben soll. Der Schirmabstand betrage 10 cm. Die Energie der Teilchen werde durch ein elektrisches Feld mit dem Potential $\varphi = 100$V erzeugt.
263. Die Energie eines α-Teilchens beträgt bei der Emission 4,8 MeV. Es werde vorausgesetzt, daß bei einer Impulsmessung Abweichungen von einem Prozent auftreten. Welche Genauigkeit ergibt sich daraus für die Lagebestimmung?
264. Wie groß ist beim Elektron im Wasserstoffatom die Ungenauigkeit der Ge-

schwindigkeit Δv_n im Verhältnis zur Geschwindigkeit v_n, wenn die Ungenauigkeit des Ortes mit $\Delta q = 2r_n$ angesetzt wird?

265. Die Strahlung eines gepulsten Lasers der Wellenlänge $\lambda = 6943 \cdot 10^{-10}$ m erzeugt in der Targetsubstanz einen Krater von $3 \cdot 10^{-3}$ cm Durchmesser. Bei einer Impulsdauer von 5 ns (1 ns = $= 10^{-9}$ s) wird dabei eine Energiedichte von $5 \cdot 10^{17}$ Wm^{-2} festgestellt. Berechnen Sie ein Energiequant $h\nu$, die emittierte Gesamtenergie, die Zahl der emittierten Quanten und die Ungenauigkeit der gemessenen Energie. Wie groß ist der Impuls eines Quants, und wie groß ist die Ungenauigkeit des Impulses?

266. Die Halbwertbreite $\Delta\lambda$ einer Spektrallinie und die mittlere Lebensdauer eines angeregten Atoms ergeben sich nach der klassischen Theorie strahlender Dipole entsprechend den Formeln

$$\Delta\lambda = \frac{e^2}{3\varepsilon_0 mc^2}, \quad \Delta t = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta\lambda}.$$

Berechnen Sie daraus die mittlere Lebensdauer eines im angeregten Zustand befindlichen Wasserstoffatoms vor dessen Aussendung eines Quants der H_α-Linie. Wie groß ist die Ungenauigkeit ΔE bei der Bestimmung des Energiequants, wenn die Zeitungenauigkeit gleich der mittleren Lebensdauer des angeregten Zustands angenommen wird?

267. Bei Verwendung von 14,4-keV-γ-Quanten des ^{57}Fe-Kerns im MÖSSBAUER-Effekt hat die Frequenzungenauigkeit den Wert

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 3 \cdot 10^{-13}.$$

Berechnen Sie daraus die Ungenauigkeit der Energiebestimmung ΔE und die mittlere Lebensdauer des angeregten Zustands, die, entsprechend dem HEISENBERGschen Prinzip, der Zeitungenauigkeit gleichzusetzen ist.

268. Die Hohlraumstrahlung kann als eine ständige Hin- und Herreflexion von Strahlungsquanten des Impulses $p = \frac{h}{\lambda}$ aufgefaßt werden. Welche untere Grenze für die Wellenlänge und welche obere Grenze für die Frequenz ergeben sich aus dieser Annahme unter Berücksichtigung der Hypothese von MARCH-FORADORI?

269. Bei Elementarakten können Strahlungsquanten zur Erzeugung ruhmassebehafteter Teilchen führen. Wo liegt die obere Grenze der Masse von solcherart erzeugten Teilchen?

270. Berechnen Sie die Halbachsen der Elektronenbahnen des einfach ionisierten Heliumatoms für den Fall $n = 2$.

4.2. Grundlagen der Quantentheorie

M. BORN gab den DE-BROGLIE-Wellen $\Psi = \Psi(x;y;z;t)$ eine statistische Deutung. Sie verknüpft den Atomismus der Elementarteilchen mit ihren Welleneigenschaften. Wenn Ψ^* den konjugiert komplexen Wert der Größe Ψ und $d\tau$ das Volumen eines Raumelements bezeichnet, dann gibt

$$d(Wx; y; z; t) = |\Psi|^2 \, d\tau = \Psi\Psi^* \, d\tau$$

die Wahrscheinlichkeit an, das betrachtete Teilchen im Raumelement $\mathrm{d}\tau$ anzutreffen. Da sich das Teilchen mit Sicherheit irgendwo im Raum befindet, hat man die DE-BROGLIEsche Wellenfunktion Ψ so zu normieren, daß das Integral über $\Psi\Psi^*$, über den gesamten Raum erstreckt, gleich eins wird:

$$\int \Psi\Psi^* \,\mathrm{d}\tau = 1. \qquad \textit{(Normierungsbedingung)}$$

Der physikalische Zustand eines Quantensystems sei durch die **Wellenfunktion** $\Psi = \Psi(x; y; z; t)$ charakterisiert. Der Mittelwert einer physikalischen Zustandsgröße L in diesem Quantensystem ergibt sich dann aus der Wellenfunktion Ψ durch die Beziehung

$$\bar{L} = \int \Psi^* \boldsymbol{L} \Psi \,\mathrm{d}\tau .$$

Dabei gibt $\boldsymbol{L}$ den für die betreffende physikalische Größe L charakteristischen *Operator* an.

Die in der Quantentheorie auftretenden Operatoren sind **Hermitesche Operatoren.** Als solche werden Operatoren bezeichnet, die *linear* und *selbstadjungiert* sind. Für lineare Operatoren gilt die Beziehung

$$\boldsymbol{L}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \boldsymbol{L} u_1 + c_2 \boldsymbol{L} u_2 ;$$

als selbstadjungiert wird ein Operator bezeichnet, der die Bedingungsgleichung

$$\int u_1^* \boldsymbol{L} u_2 \,\mathrm{d}\tau = \int u_2 \boldsymbol{L}^* u_1^* \,\mathrm{d}\tau$$

erfüllt. Das Integral ist dabei über den gesamten Bereich der Variablen zu erstrecken. Die u_1 und u_2 sind quadratisch integrierbare Funktionen.

Die wichtigsten Operatoren der Quantentheorie sind (in Ortskoordinatendarstellung) der *Operator des Impulses*:

$$\boldsymbol{p} = -\mathrm{i}\hbar\nabla = -\mathrm{i}\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

der *Operator der kinetischen Energie*:

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{k} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

der *Operator des Ortsvektors*, der eine Multiplikation mit dem Ortsvektor vollzieht:

$$\boldsymbol{r} = \vec{r}(x; y; z),$$

der *Operator der potentiellen Energie*, der gleichfalls in einer Multiplikation

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{p} = E_\mathrm{p}\,(x; y; z)$$

besteht, sowie der **Hamilton-Operator** *der Gesamtenergie*

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}_\mathrm{k} + \boldsymbol{E}_\mathrm{p}$$

und der zeitliche Operator der Gesamtenergie

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

Die Gleichung

$$\boldsymbol{L}\Psi = L\Psi$$

wird als **Eigenwertgleichung** des Operators $\boldsymbol{L}$ bezeichnet. Es besteht die Forderung, daß die sich ergebenden Lösungen *eindeutig, stetig und endlich* sein müssen. Daraus folgt, daß im allgemeinen nur für spezielle Eigenwerte $L = L_1, L_2, \ldots$ nichttriviale Lösungen existieren. *Diese Lösungen werden als* **Eigenfunktionen** *bezeichnet.*
Wenn die Operatoren $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{M}$ *kommutativ* sind, so daß für alle Funktionen Ψ die Beziehung

$$(\boldsymbol{LM} - \boldsymbol{ML})\,\Psi = 0$$

gilt, so gehören zu den beiden Operatoren gleiche Eigenfunktionen. In diesem Fall sind die physikalischen Größen L und M prinzipiell gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit meßbar. Dagegen sind für *nichtvertauschbare Operatoren* der Art

$$\boldsymbol{LM} - \boldsymbol{ML} \neq 0$$

die physikalischen Zustandsgrößen L und M im Sinne der HEISENBERGschen Unschärferelation nicht gleichzeitig meßbar.
Für die verschiedenen Quantenzustände, in denen sich die Elementarteilchen befinden, wird die zugehörige Wellenfunktion $\Psi = \Psi\,(x; y; z; t)$ durch die **Schrödinger-Gleichung**

$$\boldsymbol{H}\Psi = \boldsymbol{E}\Psi$$

bestimmt. Im Fall stationärer Zustände geht diese Gleichung über in

$$\boldsymbol{H}\psi = E\psi, \quad \psi = \psi\,(x;y;z),$$

wobei E die Gesamtenergie angibt. Aus ψ ergibt sich die Massendichte des Teilchenstroms gemäß

$$\vec{j} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\psi\,\Delta\psi^* - \psi^*\,\Delta\psi).$$

B Beispiele

195. Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $c = a + ib$ stellt eine Operation dar. Es ist zu bestimmen, unter welchen Bedingungen die Multiplikation eine HERMITEsche Operation ist.

Lösung

Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl ist linear, denn es gilt

$$c\,(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 c u_1 + c_2 c u_2 .$$

Wenn die Zahl $c = a + ib$ einen selbstadjungierten Operator darstellen soll, dann muß gelten

$$\int u_1^*(a + ib)\, u_2 \,\mathrm{d}x = \int u_2(a - ib)\, u_1^* \,\mathrm{d}x,$$

d. h.

$$(a + ib) \int u_1^* \, u_2 \,\mathrm{d}x = (a - ib) \int u_1^* \, u_2 \,\mathrm{d}x .$$

Diese Beziehung ist nur für $b = 0$ erfüllt, d. h., nur die Multiplikation mit einer reellen Zahl stellt eine HERMITEsche Operation dar.

196. Unter der Voraussetzung, daß die betrachteten Funktionen im Unendlichen verschwinden, ist nachzuweisen, daß der Operator

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

ein HERMITEscher Operator ist.

Lösung

Die Differentation stellt eine lineare Operation dar. Um den Nachweis zu führen, daß der Operator selbstadjungiert ist, gehen wir aus von

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1^* p_x u_2 \,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} u_1^* \, i\hbar \frac{\partial u_2}{\partial x} \,\mathrm{d}x .$$

Durch partielle Integration wird die rechte Seite gleich

$$\left[-i\hbar u_1^* u_2\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} i\hbar u_2 \frac{\partial u_1^*}{\partial x} \,\mathrm{d}x .$$

Da u_1 und u_2 im Unendlichen verschwinden, verbleibt lediglich noch das zweite Glied, das auch in der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_2 i\hbar \frac{\partial u_1^*}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 p_x^* u_1^* \, dx$$

geschrieben werden kann. Es gilt also

$$\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} u_1^* p_x u_2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 p_x^* u_1^* \, dx,}$$

womit der Nachweis der Hermitizität des Operators p_x erbracht ist.

197. Auf Grund der Definition des Impulsoperators

$$\vec{p} = -i\hbar\nabla = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1}$$

und des Ortsoperators

$$\vec{r} = \vec{r}(x; y; z) = (x; y; z) \tag{2}$$

ist nachzuweisen, daß gleich gerichtete Komponenten des Impulses und des Ortsvektors nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden können.

Lösung

Wir greifen für diesen Nachweis die x-Komponente heraus. Es gilt

$$p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad x = x. \tag{3}$$

Wenn zwei physikalische Größen L und M gleichzeitig meßbar sein sollen, so muß für ihre Operatoren gelten

$$LM\psi - ML\psi = 0.$$

Dagegen erhalten wir im vorliegenden Fall

$$p_x x\psi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = -i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x} - i\hbar\psi,$$

$$x p_x \psi = x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = -i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

d. h.,

$$\underline{(x p_x - p_x x)\,\psi = i\hbar\psi.}$$

Es können also die Größen x und p_x nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden.

198. Es soll untersucht werden, ob die Ortskoordinate y und die Impulskoordinate p_x gleichzeitig gemessen werden können.

Lösung

Es ist

$$p_x = -\mathrm{i}\,\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad y = y.$$

Daraus folgt

$$(p_x y - y p_x)\,\psi = -\mathrm{i}\,\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} y - y \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi.$$

Da x und y voneinander unabhängige Variablen sind, folgt

$$\frac{\partial}{\partial x} y\psi = y \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

und damit

$$\underline{(y p_x - p_x y)\,\psi = 0.}$$

Demnach sind die Ortskoordinate y und die Impulskoordinate p_x gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit meßbar.

199. Es soll untersucht werden, ob die Komponenten L_x, L_y, L_z des Drehimpulses $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ gleichzeitig gemessen werden können.

Lösung

Die Koordinaten des Drehimpulsoperators folgen aus

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}.$$

Hieraus erhalten wir

$$L_x = y p_z - z p_y,$$
$$L_y = z p_x - x p_z,$$
$$L_z = x p_y - y p_x.$$

Weiter ergibt sich

$$L_x L_y = (y p_z - z p_y)(z p_x - x p_z) =$$
$$= y p_z z p_x - z^2 p_x p_y - x y p_z^2 + x z p_y p_z.$$

Dagegen folgt

$$L_y L_x = (z p_x - x p_z)(y p_z - z p_y) =$$
$$= y z p_x p_z - x y p_z^2 - z^2 p_x p_y + x p_z z p_y.$$

Damit erhalten wir

$$L_x L_y - L_y L_x = y p_z z p_x - y z p_x p_z + x z p_y p_z - x p_z z p_y.$$

Beachten wir, daß

$$p_z z - z p_z = -\mathrm{i}\,\hbar \quad \text{nebst} \quad y z p_x p_z = y p_x z p_z,$$

so folgt

$$L_x L_y - L_y L_x = \mathrm{i}\,\hbar\,(x p_y - y p_x) = \mathrm{i}\,\hbar L_z.$$

Ebenso ergibt sich

$$\underline{L_y L_z - L_z L_y = \mathrm{i}\,\hbar L_x},$$

$$\underline{L_z L_x - L_x L_z = \mathrm{i}\,\hbar L_y}.$$

Die Komponenten des Drehimpulses sind also nicht gleichzeitig meßbar.

200. Berechnen Sie den Operator der kinetischen Energie und untersuchen Sie, ob die kinetische Energie gleichzeitig mit dem Impuls gemessen werden kann.

Lösung

Aus

$$E_k = \frac{m}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

folgt

$$E_k = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{(-\mathrm{i}\,\hbar\nabla)^2}{2m} = -\hbar^2 \frac{\Delta}{2m}$$

mit

$$\nabla^2 = \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

Wenn wir entscheiden wollen, ob beide Größen gleichzeitig gemessen werden können, müssen wir berechnen:

$$E_k \vec{p} - \vec{p} E_k = -\hbar^2 \frac{\Delta}{2m} (-\mathrm{i}\,\hbar\nabla) - (-\mathrm{i}\,\hbar\nabla)\left(-\hbar^2 \frac{\Delta}{2m}\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{i}\,\hbar^3}{2m} (\Delta\nabla - \nabla\Delta).$$

Die Reihenfolge, in der die Operatoren Δ und ∇ auf eine Funktion angewandt werden, ist ohne Einfluß auf das Resultat. Damit folgt

$$\underline{E_k \vec{p} - \vec{p} E_k = 0.}$$

Kinetische Energie und Impuls eines Teilchens sind gleichzeitig meßbar.

201. Es soll die SCHRÖDINGER-Gleichung aus der allgemeinen Form

$$H\Psi(x; y; z; t) = E\Psi(x; y; z; t) \tag{1}$$

für den Fall des Potentials $E_p = E_p(x; y; z)$ abgeleitet werden.

Lösung

Der HAMILTON-Operator H hat die Gestalt

$$H = E_k + E_p. \tag{2}$$

Für den Operator der kinetischen Energie ist zu schreiben:

$$E_k = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{(-i\hbar\nabla)^2}{2m} = -\hbar^2 \frac{\Delta}{2m}, \tag{3}$$

während für den Operator der potentiellen Energie gilt

$$E_p = E_p(x; y; z).$$

Ferner ist

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

Damit folgt aus Gl. (1) die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi - E_p(x; y; z)\,\Psi = 0. \tag{4}$$

202. Ermitteln Sie eine Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung für den Fall, daß keine zeitlich veränderlichen äußeren Kräfte wirken und daher der HAMILTON-Operator H nicht von der Zeit abhängt.

Lösung

Zur Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H(x; y; z)\,\Psi \tag{1}$$

wird der Produktansatz

$$\Psi(x; y; z; t) = \varphi(t)\,\psi(x; y; z) \tag{2}$$

verwendet. Wir setzen diesen in die SCHRÖDINGER-Gleichung ein und erhalten

$$i\hbar\psi(x; y; z)\frac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi(t)\,H\psi(x; y; z). \tag{3}$$

Wir separieren Gl. (3) nach den Variablen t und x, y, z und erhalten

$$\frac{i\hbar \frac{d\varphi(t)}{dt}}{\varphi(t)} = \frac{H\psi(x; y; z)}{\psi(x; y; z)}. \tag{4}$$

Wenn wir die Separationskonstante mit E bezeichnen, so folgen aus Gl. (3) die beiden Differentialgleichungen

$$\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = E\varphi(t), \quad H\psi(x;y;z) = E\psi(x;y;z). \tag{5,1) (5,2}$$

Gl. (5,1) hat die Lösung

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}, \tag{6}$$

Gl. (5,2) lautet, nach den einzelnen Summanden des HAMILTON-Operators aufgelöst,

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\,\Delta\psi = E_\mathrm{p}\psi = E\psi. \tag{7}$$

Diese Gleichung wird als SCHRÖDINGER-Gleichung für stationäre Zustände bezeichnet. Wenn man ihre Lösung $\psi = \psi_n(x;y;z)$ kennt, so läßt sich damit die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung (1) schreiben:

$$\underline{\Psi(x;y;z;t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}\,\psi_n(x;y;z).} \tag{8}$$

203. Der Grundzustand des Wasserstoffatoms wird durch die Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\psi = C\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{a_1}}, \quad a_1 = 0{,}529\cdot 10^{-10}\mathrm{m} \tag{1}$$

beschrieben. Diese Funktion ist zu normieren. Wie groß ist nach Gl. (1) die Wahrscheinlichkeit, das umlaufende Elektron innerhalb einer Kugel vom Radius $4a_1$ anzutreffen?

Lösung

Entsprechend der Normierungsvorschrift muß

$$\int \psi\psi^*\,\mathrm{d}\tau = 1 \tag{2}$$

sein, wobei das Integral über den gesamten Bereich, in dem sich das Elektron aufhalten kann, zu erstrecken ist. Wir unterteilen diesen Raum in Kugelschalen (Bild 117) mit dem Volumen

$$\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r. \tag{3}$$

Demnach muß gelten

$$4\pi\,|C|^2 \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_1}}\,r^2\,\mathrm{d}r = 1. \tag{4}$$

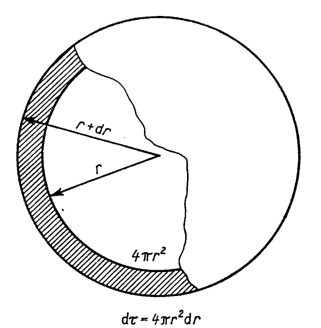


Bild 117

Zur Berechnung dieses Integrals verwenden wir die Formel

$$\int_0^\infty x^n \, e^{-\beta x} = \frac{n!}{\beta^{n+1}} \tag{5}$$

und erhalten aus Gl. (4)

$$\pi \, |C|^2 \, a_1^3 = 1 \quad \text{bzw.} \quad C = \frac{1}{\sqrt{\pi \, a_1^3}} \, . \tag{6}$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit innerhalb einer Kugel mit dem Radius $4a_1$ ergibt sich aus

$$\int \psi\psi^* \, d\tau = \frac{1}{\pi \, a_1^3} \int_0^{4a_1} e^{-\frac{2r}{a_1}} \, 4\pi r^2 \, dr. \tag{7}$$

Wenn wir transformieren

$$\xi = \frac{2r}{a_1} ,$$

so ergibt sich

$$\int \psi\psi^* \, d\tau = \frac{1}{2} \int_0^8 e^{-\xi} \, \xi^2 \, d\xi = \frac{1}{2} \left[e^{-\xi}(\xi^2 + 2\xi + 2) \right]_0^8 =$$

$$= \frac{-0{,}00034\,(64 + 16 + 2) + 2}{2} = 0{,}986.$$

In 98,6% aller Fälle befindet sich das durch die Lösungsfunktion nach Gl. (1) beschriebene Teilchen innerhalb einer Kugel mit dem Radius $4a_1$.

204. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den durch die Lösungsfunktion

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1^3}} \, e^{-\frac{r}{a_1}}$$

beschriebenen Grundzustand des Wasserstoffatoms, das Elektron innerhalb einer Kugelschale mit dem Radius a_1 und der Dicke $dr = 0{,}1\,a_1$ anzutreffen (Bild 117)?

Lösung

Wegen der geringen Dicke der Kugelschale $dr = 0{,}1\,a_1$ ist eine Integration nicht erforderlich. Wir können daher schreiben:

$$\psi\psi^* \, d\tau = \frac{1}{\pi a_1^3} \, e^{-\frac{2r}{a_1}} \, 4\pi r^2 \, dr = 4 \, e^{-2} \, \frac{dr}{a_1} = 4 \cdot 0{,}135 \cdot 0{,}1 = 0{,}054.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,4% befindet sich das Teilchen in der angegebenen Kugelschale.

205. Die Funktion

$$\psi_n = C_n H_n(\xi)\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{1}$$

mit den HERMITEschen Polynomen

$$H_n(\xi) = (-1)^n\, \mathrm{e}^{\xi^2} \frac{\mathrm{d}^n \mathrm{e}^{-\xi^2}}{\mathrm{d}\xi^n} = (2\xi)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2\xi)^{n-2} + \cdots \tag{2}$$

sowie

$$\xi = \frac{x}{x_0}\,; \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$$

stellt eine Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung für den harmonischen Oszillator dar (m Masse, ω_0 Eigenfrequenz, x Auslenkung). Gl. (1) ist normieren.

Lösung

Zur Normierung der Funktion ψ_n muß die Bedingung

$$\int \psi_n \psi_n^*\, \mathrm{d}x = \int \psi_n^2\, \mathrm{d}x = 1 \tag{3}$$

erfüllt werden. Es gilt zunächst

$$\int \psi_n^2(\xi)\, \mathrm{d}\xi = C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(\xi)\, \mathrm{e}^{-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi = C_n^2 (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) \frac{\mathrm{d}^n \mathrm{e}^{-\xi^2}}{\mathrm{d}\xi^n}\, \mathrm{d}\xi. \tag{4}$$

Der letzte Ausdruck ergibt nach partieller Integration

$$C_n^2(-1)^n \left\{ \left[H_n(\xi) \frac{\mathrm{d}^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\xi^2}}{\mathrm{d}\xi^{n-1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\xi^2}}{\mathrm{d}\xi^{n-1}} \frac{\mathrm{d}H_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\, \mathrm{d}\xi \right\}. \tag{5}$$

Hierin verschwindet der erste Summand beim Einsetzen der Integrationsgrenzen, da der Exponentialfaktor für das Verhalten der gesamten Funktion bestimmend ist. Der zweite Summand wird weiter partiell integriert. Wenn wir dieses Verfahren n-mal anwenden, ergibt sich schließlich

$$\int \psi_n^2(\xi)\, \mathrm{d}\xi = C_n^2(-1)^n (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2} \frac{\mathrm{d}^n H_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi^n}\, \mathrm{d}\xi. \tag{6}$$

Aus Gl. (2) folgt

$$\frac{\mathrm{d}^n H_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi^n} = 2^n n!$$

Ferner ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi = \sqrt{\pi}. \tag{7}$$

Wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{x_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2 \frac{x}{x_0}\,\mathrm{d}x = C_n^2(-1)^{2n}\,2^n\,n!\,\sqrt{\pi} \tag{8}$$

erhalten wir schließlich unter Beachtung von

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2\left(\frac{x}{x_0}\right)\mathrm{d}x = 1 \tag{9}$$

für die gesuchte Normierungskonstante den Ausdruck

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}\,x_0}} = \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\sqrt[4]{\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}}. \tag{10}$$

206. Der Quantenzustand eines in der ersten Grundschwingung befindlichen harmonischen Oszillators wird durch die Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\psi_1 = -C_1 H_1(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

beschrieben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das betrachtete Teilchen, ein Proton mit der Masse $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, im Intervall $2x_0 < x < 2{,}1x_0$ anzutreffen? Es ist $\omega_0 = 5{,}21 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$. Die Bezeichnungen wurden wie in Beispiel 205 verwendet.

Lösung

Nach Beispiel 405, Gl. (2), gilt

$$\psi_1 = \frac{-1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}\,x_0}} H_1(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

mit

$$H_1(\xi) = 2\xi,\quad \xi = \frac{x}{x_0},\quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}.$$

Wir erhalten damit für die gesuchte Aufenthaltswahrscheinlichkeit

$$\psi_1^2\,\mathrm{d}x = \frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}\,x_0^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{x_0^2}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}}\,\frac{0{,}1}{2}\,\mathrm{e}^{-4} = \frac{4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}0183}{1{,}77} = 0{,}00413.$$

Dabei ist

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} = \sqrt{\frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 5{,}21 \cdot 10^{14}}}\,\mathrm{m} = \sqrt{1{,}21 \cdot 10^{-22}}\ \mathrm{m},$$

$$x_0 = 0{,}11 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}.$$

Demnach hat der betrachtete Oszillator mit einer Wahrscheinlichkeit von $\underline{0{,}413\,\%}$ eine Auslenkung zwischen $0{,}22 \cdot 10^{-10}$ m und $0{,}231 \cdot 10^{-10}$ m.

207. Nach dem **Greenschen Satz** gilt

$$\iiint (\psi_k \Delta\psi_l^* - \psi_l^* \Delta\psi_k)\, d\tau = \oiint \left(\psi_k \frac{\partial\psi_l^*}{\partial\vec{u}} - \psi_l \frac{\partial\psi_k^*}{\partial\vec{u}}\right) \partial\sigma. \qquad (1)$$

Dabei gibt $\vec{u}$ die Richtung der äußeren Normalen auf die Oberfläche σ an. Es ist nachzuweisen, daß die Lösungsfunktionen ψ_k, ψ_l der SCHRÖDINGER-Gleichung orthogonal sind.

Lösung

Das Integrationsgebiet wird über den gesamten Raum erstreckt. Da im Unendlichen die Lösungsfunktionen ψ_k und ψ_l verschwinden, muß auch das Oberflächenintegral verschwinden.
Nach SCHRÖDINGER gelten im stationären Fall die Gleichungen

$$\Delta\psi_{l\,k} = \frac{2m}{\hbar^2}(E_p - E_{k,l})\psi_{k,l}, \quad \Delta\psi_{k,l}^* = \frac{2m}{\hbar^2}(E_p - E_{k,l})\,\psi_{k,l}^*. \qquad (2)$$

E_k und E_l geben dabei die Gesamtenergien E in den Quantenzuständen k und l an. Wenn wir die Gl. (2) in den GREENschen Satz einsetzen, erhalten wir

$$\frac{2m}{\hbar^2}(E_p - E_l)\iiint \psi_k\psi_l^*\, d\tau = \frac{2m}{\hbar^2}(E_p - E_k)\iiint \psi_k\psi'^*\, d\tau \qquad (3)$$

und daraus

$$(E_k - E_l)\iiint \psi_k\psi_l^*\, d\tau = 0.$$

Für $E_k \neq E_l$ folgt somit die Orthogonalitätsbeziehung

$$\iiint \psi_k\psi_l^*\, d\tau = 0.$$

208. An Hand der SCHRÖDINGER-Gleichung für stationäre Zustände ist nachzuweisen, daß die erste Ableitung der Wellenfunktion stetig ist, auch dann, wenn die potentielle Energie sich sprunghaft verändert. Dieser Nachweis ist unter der Voraussetzung zu führen, daß nur von der Ortsvariablen x eine Abhängigkeit besteht.

Lösung

Bei ausschließlicher Abhängigkeit von der Variablen x lautet die SCHRÖDINGER-Gleichung für stationäre Zustände

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E_p - E)\,\psi = 0. \qquad (1)$$

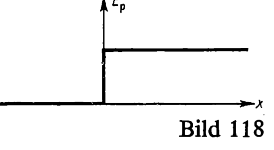


Bild 118

Die potentielle Energie sei an der Stelle $x = 0$ unstetig (Bild 118). Wenn man die SCHRÖDINGER-Gleichung über einen Bereich von $x = -\varepsilon$ bis $x = +\varepsilon$ integriert, so

folgt

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{d^2\psi}{dx^2}\,dx+\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(E_p-E)\,\psi\,dx=0. \tag{2}$$

Auf Grund der Beziehung

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{d^2\psi}{dx^2}\,dx=\left[\frac{d\psi}{dx}\right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}=\frac{d\psi(+\varepsilon)}{dx}-\frac{d\psi(-\varepsilon)}{dx}$$

ergibt sich aus Gl. (2)

$$\frac{d\psi(+\varepsilon)}{dx}-\frac{d\psi(-\varepsilon)}{dx}=\frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(E_p-E)\,\psi\,dx.$$

Im Grenzfall $\varepsilon \to 0$ verschwindet das rechts stehende Integral, und es bleibt

$$\underline{\frac{d\psi(+\varepsilon)}{dx}=\frac{d\psi(-\varepsilon)}{dx}},$$

d. h., die erste Ableitung der Wellenfunktion ist stetig.

209. Aus der Kontinuitätsgleichung soll auf die Dichte des Teilchenstroms geschlossen werden.

Lösung

Wir wenden die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{J}=0 \tag{1}$$

an. Dabei bezeichnen wir mit $\varrho=\varrho\,(x;y;z;t)$ die mittlere Dichte der Teilchenzahl, mit J die mittlere Dichte des Teilchenstroms. In der Quantentheorie haben wir zu setzen

$$\varrho=\Psi\Psi^*. \tag{2}$$

Die Wellenfunktionen Ψ und Ψ^* genügen den SCHRÖDINGER-Gleichungen

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\Psi-E\Psi=0 \tag{3}$$

und

$$-i\,\hbar\,\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\Psi^*-E_p\Psi^*=0. \tag{4}$$

Wir multiplizieren Gl. (3) mit Ψ^* und Gl. (4) mit Ψ und subtrahieren, so daß sich ergibt

$$i\,\hbar\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)+\frac{\hbar^2}{2m}\,(\Psi^*\Delta\Psi-\Psi\Delta\Psi^*)=0. \tag{5}$$

Auf Grund von Gl. (2) folgt weiter

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\Psi^* \Delta \Psi - \Psi \Delta \Psi^*) = 0. \tag{6}$$

Durch Vergleich mit der Kontinuitätsgleichung (1) ergibt sich somit

$$\operatorname{div} \vec{J} = \nabla \cdot \vec{J} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\Psi \Delta \Psi^* - \Psi^* \Delta \Psi). \tag{7}$$

Hieraus folgt

$$\vec{J} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi). \tag{8}$$

Wir differenzieren Gl. (8) und erhalten

$$\nabla \vec{J} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\nabla \Psi \nabla \Psi^* + \Psi \nabla^2 \Psi^* - \nabla \Psi^* \nabla \Psi - \Psi^* \nabla^2 \Psi),$$

d. h.

$$\nabla \vec{J} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\Psi \Delta \Psi^* - \Psi^* \Delta \Psi),$$

wie es gemäß Gl. (7) sein muß. $\vec{J}$ hat daher den Charakter einer Massenstromdichte. Um die mittlere Dichte j des elektrischen Stromes zu erhalten, müssen wir $\vec{J}$ mit der Elementarladung e multiplizieren. Es folgt für die elektrische Stromdichte

$$\underline{j = e\vec{J} = \frac{\mathrm{i}\hbar e}{2m}(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi).}$$

210. Potentialschwelle. Die potentielle Energie sei wie folgt vorgegeben:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & E_\mathrm{p} = 0 & \text{für } x < 0, \\ \text{II} & E_\mathrm{p} = E_0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq l, \\ \text{III} & E_\mathrm{p} = 0 & \text{für } x > l. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Bild 119

Eine derartige Potentialverteilung wird als Potentialschwelle bezeichnet. Es soll lediglich eine Abhängigkeit des Potentials von der räumlichen Variablen x bestehen.
Von links falle ein Elektronenstrahl ein (Bild 119). Für die einzelnen Bereiche von x sind die Quantenzustände zu berechnen. Insbesondere ist der reflektierte und der durch die Potentialschwelle hindurchgehende Anteil des Elektronenstrahls zu bestimmen. Die Elektronenenergie sei $E = 100$ eV, die Höhe der Potentialschwelle $E_0 = 50$ eV, ihre Breite $l = 10^{-10}$ m.

Lösung

Die SCHRÖDINGER-Gleichung für stationäre Zustände bei Abhängigkeit von nur einer Variablen x lautet

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_\mathrm{p})\,\psi = 0. \tag{2}$$

Wir setzen

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad n = \sqrt{\frac{E - E_p}{E}} \tag{3}$$

und erhalten für die Bereiche I und III

$$n = 1,$$

dagegen für den Bereich II

$$n = n_0 = \sqrt{\frac{E - E_0}{E}}. \tag{4}$$

Für die Bereiche I und III ergibt sich somit die SCHRÖDINGER-Gleichung zu

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \tag{5}$$

dagegen für den Bereich II

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - k^2 n_0^2 \psi = 0. \tag{6}$$

Die Lösungen in den einzelnen Bereichen lauten:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I} \quad \psi = \psi_{\text{I}}(x) = A_{\text{I}}\, e^{ikx} + B_{\text{I}}\, e^{-ikx}, \\ &\text{II} \quad \psi = \psi_{\text{II}}(x) = A_{\text{II}}\, e^{ikn_0x} + B_{\text{II}}\, e^{-ikn_0x}, \\ &\text{III} \quad \psi = \psi_{\text{III}}(x) = A_{\text{III}}\, e^{ikx} + B_{\text{III}}\, e^{-ikx}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Bis auf den nicht aufgeführten Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ erhalten wir also ebene DE-BROGLIE-Wellen.
Dem von links einfallenden Teilchenstrom entspricht im Bereich I eine von links nach rechts fortschreitende DE-BROGLIE-Welle. Es wird daher $A_{\text{I}} = 1$ gesetzt. Ferner können wir $B_{\text{III}} = 0$ annehmen, da $B_{\text{III}} \neq 0$ eine von rechts einfallende Welle bedeuten würde.
Zur Bestimmung der Amplituden B_{I}, A_{II}, B_{II}, A_{III} verwenden wir die Stetigkeit der Lösungsfunktion und ihrer ersten Ableitung. Es muß also erfüllt sein:

$$\begin{aligned} &\psi_{\text{I}}(0) = \psi_{\text{II}}(0), \qquad \psi_{\text{II}}(l) = \psi_{\text{III}}(l), \\ &\frac{d\psi_{\text{I}}(0)}{dx} = \frac{d\psi_{\text{II}}(0)}{dx}, \quad \frac{d\psi_{\text{II}}(l)}{dx} = \frac{d\psi_{\text{III}}(l)}{dx}. \end{aligned} \tag{8}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} &1 + B_{\text{I}} = A_{\text{II}} + B_{\text{II}}, \\ &A_{\text{II}}\, e^{ikn_0l} + B_{\text{II}}\, e^{-ikn_0l} = A_{\text{III}}\, e^{ikl}, \\ &1 - B_{\text{I}} = n_0(A_{\text{II}} - B_{\text{II}}), \\ &A_{\text{II}}\, e^{ikn_0l} - B_{\text{II}}\, e^{-ikn_0l} = A_{\text{III}}\, n_0\, e^{ik} \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir die Lösung

$$\left.\begin{aligned} B_{\mathrm{I}} &= \frac{-2\,\mathrm{i}\,(1-n_0^2)\sin kn_0 l}{\triangle}, \quad A_{\mathrm{II}} = \frac{2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kn_0 l}(1+n_0)}{\triangle} \\ B_{\mathrm{II}} &= \frac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kn_0 l}\,(1-n_0)}{\triangle}, \quad A_{\mathrm{III}} = \frac{4n_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kl}}{\triangle}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

mit

$$\triangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kn_0 l}\,(1+n_0)^2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kn_0 l}\,(1-n_0)^2 .$$

Für den Elektronenstrom der einfallenden Welle ergibt sich

$$J_e = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\,(\psi_{\mathrm{I}}\nabla\psi_{\mathrm{I}}^* - \psi_{\mathrm{I}}^*\nabla\psi_{\mathrm{I}}) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xk}}{\mathrm{d}x}\right),$$

d. h.,

$$J_e = \frac{\hbar k}{m}. \tag{10}$$

In gleicher Weise erhalten wir für den Elektronenstrom der reflektierten Welle $B_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ und für den der gebrochenen Welle $A_{\mathrm{III}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$

$$J_r = -\frac{\hbar k}{m}\,B_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{I}}^*, \quad J_d = \frac{\hbar k}{m}\,A_{\mathrm{III}}A_{\mathrm{III}}^*. \tag{11}$$

Als Reflexionskoeffizient r und als Durchgangskoeffizient d finden wir somit

$$r = \frac{|\vec{J}_r|}{|\vec{J}_e|} = B_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{I}}^*, \quad d = \frac{|\vec{J}_d|}{|\vec{J}_e|} = A_{\mathrm{III}}A_{\mathrm{III}}^*. \tag{12}$$

Wir setzen $E > E_0$ voraus. Aus den Gln. (9) u. (12) folgt dann

$$r = \frac{(1-n_0^2)^2\sin^2 kn_0 l}{2n_0^2(1+\cos^2 kn_0 l) + \sin^2 kn_0 l(1+n_0^4)}, \tag{13}$$

$$d = \frac{4n_0^2}{2n_0^2(1+\cos^2 kn_0 l) + \sin^2 kn_0 l(1+n_0^4)}. \tag{14}$$

Wir setzen die vorgegebenen Größen ein und finden aus Gl. (4) die Brechzahl

$$n_0 = \sqrt{\frac{E-E_0}{E}} = \sqrt{\frac{100-50}{100}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707.$$

Aus Gl. (3) folgt für die Wellenzahl

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 100\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{(1{,}05\cdot 10^{-34})^2}}\ \mathrm{m}^{-1} =$$

$$= \frac{5{,}39\cdot 10^{-24}}{1{,}05\cdot 10^{-34}}\,\mathrm{m}^{-1} = 5{,}14\cdot 10^{10}\mathrm{m}^{-1}.$$

Weiter erhalten wir

$$kn_0 l = 5{,}14\cdot 10^{10}\cdot 0{,}707\cdot 10^{-10} = 3{,}634,$$

$$\sin kn_0 l = \sin 208{,}2^\circ = -\sin 28{,}2^\circ = -0{,}475,$$

$$\sin^2 kn_0 l = 0{,}226, \quad \cos^2 kn_0 l = 0{,}774.$$

Daraus ergibt sich

$$r = \frac{(1 - 0{,}5)^2 \cdot 0{,}226}{2 \cdot 0{,}5\,(1 + 0{,}774) + 0{,}226\,(1 + 0{,}25)} = \frac{0{,}0565}{2{,}056} = 0{,}027,$$

$$d = \frac{2}{2{,}056} = 0{,}973.$$

Es werden also weniger als drei Prozent reflektiert; der weitaus größere Teil des Strahls geht durch die Potentialschwelle hindurch.

211. Es liege eine Potentialschwelle wie in Beispiel 210 vor, jedoch sei die Höhe E_0 der Schwelle größer als die Teilchenenergie E. Wie lauten die Ausdrücke für den reflektierten, wie für den gebrochenen Teil des einfallenden Strahls? Welche Zahlenwerte ergeben sich für den Fall $E = 10$ eV, $E_0 = 20$ eV?

Lösung

Gemäß Gl. (4) in Beispiel 210 wird die Brechzahl n_0 imaginär:

$$n_0 = \sqrt{\frac{E - E_0}{E}} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{E_0 - E}{E}} = \mathrm{i}\,|n_0|.$$

Damit folgt aus Gl. (9) von Beispiel 210, wenn wir beachten, daß $\sin \mathrm{i}\,\varphi = \mathrm{i} \sinh \varphi$ ist,

$$B_{\mathrm{I}} = \frac{2(1 + |n_0|^2) \sinh k\,|n_0|\,l}{\triangle},$$

$$A_{\mathrm{III}} = \frac{4\,\mathrm{i}\,|n_0|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kl}}{\triangle},$$

mit

$$\triangle = \mathrm{e}^{k|n_0|l}\,(1 + \mathrm{i}\,|n_0|)^2 - \mathrm{e}^{-k|n_0|l}\,(1 - \mathrm{i}\,|n_0|)^2.$$

Hieraus erhalten wir

$$r = B_{\mathrm{I}} B_{\mathrm{I}}^* = \frac{(1 + |n_0|^2)^2 \sinh^2 k|n_0|\,l}{(1 - |n_0|^2)^2 \sinh^2 k|n_0|\,l + 4\,|n_0|^2 \cosh^2 k\,|n_0|\,l},$$

$$d = A_{\mathrm{III}} A_{\mathrm{III}}^* = \frac{4\,|n_0|^2}{(1 - |n_0|^2)^2 \sinh^2 k\,|n_0|\,l + 4\,|n_0|^2 \cosh^2 k\,|n_0|\,l}.$$

Mit den gegebenen Größen folgt

$$n_0 = \mathrm{i}\sqrt{\frac{E_0 - E}{E}} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{20 - 10}{10}} = \mathrm{i},$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(1{,}05 \cdot 10^{-34})^2}}\ \mathrm{m}^{-1} = 1{,}63 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m}^{-1}.$$

Daraus folgt weiter

$$\sinh k|n_0|\,l = \sinh 1{,}63 = 2{,}45, \quad \sinh^2 1{,}63 = 6{,}01,$$

$$\cosh k|n_0|\,l = \cosh 1{,}63 = 2{,}65, \quad \cosh^2 1{,}63 = 7{,}01,$$

$$\mathrm{e}^{2k|n_0|l} = \mathrm{e}^{3{,}26} = 26{,}1.$$

Diese Werte, in die Formeln für r und d eingesetzt, ergeben

$$r = \frac{(1 + 1^2)^2 \cdot 6{,}01}{4 \cdot 1^2 \cdot 7{,}01} = \underline{0{,}857},$$

$$d = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 1^2 \cdot 7{,}01} = \underline{0{,}143}.$$

Demnach durchlaufen 14,3 % der einfallenden Elektronen die Potentialschwelle, obwohl ihre Energie E kleiner als das zu überwindende Potential E_0 ist (quantenmechanischer **Tunneleffekt**).

212. Wie groß ist der Anteil der eine Schwelle durchlaufenden Elektronen, wenn wie im vorhergehenden Beispiel $E = 10$ eV, $E_0 = 20$ eV, die Schwellenlänge aber $l = 10^{-9}$ m beträgt?

Lösung

Für die Werte n_0 und k ergibt sich wie in Beispiel 211

$$n_0 = \mathrm{i}, \quad k = 1{,}63 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m}^{-1}.$$

Damit folgt

$$k\,|n_0|\,l = 1{,}63 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9} = 16{,}3 \gg 1.$$

Nach Definition der hyperbolischen Funktionen gilt

$$\sinh \varphi = \frac{\mathrm{e}^{\varphi} - \mathrm{e}^{-\varphi}}{2}, \quad \cosh \varphi = \frac{\mathrm{e}^{\varphi} + \mathrm{e}^{-\varphi}}{2}.$$

Für $\varphi \gg 1$ kann der Summand $\mathrm{e}^{-\varphi}$ vernachlässigt werden. Damit folgt

$$\sinh k|n_0|\,l \approx \cosh k\,|n_0|\,l \approx \frac{\mathrm{e}^{k|n_0|l}}{2}.$$

Der im vorhergehenden Beispiel abgeleitete Durchlässigkeitskoeffizient

$$d = \frac{4\,|n_0|^2}{(1 - |n_0|^2)^2 \sinh^2 k|n_0|\,l + 4\,|n_0|^2 \cosh^2 k\,|n_0|\,l}$$

geht damit wegen $k|n_0|l \gg 1$ über in

$$d = \frac{16\,|n_0|^2\,\mathrm{e}^{-2k|n_0|l}}{(1 + |n_0|^2)^2}.$$

Mit den gegebenen Zahlen folgt

$$d = \frac{16 \cdot 1}{(1 + 1)^2}\,\mathrm{e}^{-32{,}6} = \underline{3 \cdot 10^{-14}}.$$

Der quantenmechanische Tunneleffekt tritt nur auf, wenn die Schwellenbreite von atomarer Größenordnung ist. Mit zunehmender Schwellenbreite nimmt die Durchlässigkeit der Potentialwelle sehr stark ab.

213. An eine Wolframkatode wird ein elektrisches Feld gelegt. Es ist abzuschätzen, von welcher Feldstärke an die entstehende „kalte Emission“ einen nachweisbaren Elektronenstrom ergibt. Für die effektive Austrittsarbeit W sei der Wert $W = 4\,\mathrm{eV}$ angenommen.

Lösung

Die Austrittsarbeit W muß aufgewendet werden, um ein Elektron aus dem Metall freizusetzen. Die potentielle Energie des Elektrons ist im Metall kleiner als im Vakuum. Sie sei im Metall gleich Null angesetzt. Wenn kein äußeres Feld anliegt, so ist außerhalb des Metalls die potentielle Energie gleich der Austrittsarbeit W.
Das angenommene äußere Feld wirkt auf das Elektron mit der Kraft $e\vec{E}$ senkrecht zur Metalloberfläche (Bild 120). Die Richtung dieser Kraft wählen wir als x-Achse. An der Grenzfläche des Metalls ist $x = 0$. Als Potential der äußeren Kraft ergibt sich $-e|\vec{E}|x$. In dem vom elektrischen Feld erfüllten Vakuum beträgt die potentielle Energie

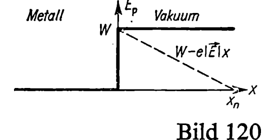


Bild 120

$$E_p = W - e|\vec{E}|\,x. \tag{1}$$

Nach Beispiel 412 ergibt sich als Durchlässigkeitskoeffizient für eine Schwelle der Breite l

$$d = \frac{16\,|n_0|^2}{(1 + |n_0|^2)^2}\,\mathrm{e}^{-2k|n_0|l}\,. \tag{2}$$

Im vorliegenden Fall kann die Gesamtenergie E der Elektronen gegenüber der potentiellen Energie vernachlässigt werden. Somit folgt

$$k|n_0| = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\sqrt{\frac{E_p - E}{E}} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E_p - E)} \approx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E_p}\,. \tag{3}$$

Ebenso wird die infolge Elektronenemission induzierte Kraft vernachlässigt, da ihr Potential in der effektiven Austrittsarbeit enthalten ist.
Die potentielle Energie ist nicht konstant, sie nimmt linear ab. Wir zerlegen die Potentialverteilung in Schwellen konstanten Potentials der Breite $\mathrm{d}x$. Für die Durchlässigkeit folgt

$$d = d_1\,\mathrm{e}^{-2k|n_0(x_1)|\mathrm{d}x_1} = d_2\,\mathrm{e}^{-2k|n_0(x_2)|\mathrm{d}x_2} \ldots = \bar{d}\,\mathrm{e}^{-\int k|n_0(x)|\mathrm{d}x}\,. \tag{4}$$

Dabei ist das Integral im Exponenten von $x_1 = 0$ bis zu einem Wert x_n zu erstrecken, für den das Potential $E_p = 0$ wird. Aus Gl. (1) ergibt sich

$$x_n = \frac{W}{e|\vec{E}|}\,. \tag{5}$$

Wir setzen die Gln. (3) u. (5) in Gl. (4) ein und erhalten

$$d = \bar{d}\exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\int\limits_0^{\frac{W}{e|\vec{E}|}}\sqrt{W - e|\vec{E}|x}\,\mathrm{d}x\right]. \tag{6}$$

Zur Auswertung des Integrals setzen wir

$$\frac{e|\vec{E}|}{W}\,x = \xi$$

und erhalten

$$\int_0^{\frac{W}{e|\vec{E}|}} \sqrt{W - e|\vec{E}|\,x}\;\mathrm{d}x = \frac{W^{\frac{3}{2}}}{e|\vec{E}|}\int_0^1 \sqrt{1-\xi}\;\mathrm{d}\xi = \frac{2}{3}\,\frac{W^{\frac{3}{2}}}{e|\vec{E}|}\,.$$

Somit folgt

$$d = \bar{d}\exp\left[-\frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\,\frac{W^{\frac{3}{2}}}{e|\vec{E}|}\right].$$

Metallplatte (Wo)

Bild 121

Wir verwenden die Schaltung nach Bild 121, und es ergibt sich ein gleichmäßig fließender Emissionsstrom. Aus seiner Stärke läßt sich die Emissionsdichte $\vec{j}$ bestimmen. Für sie erhalten wir nach Ausrechnung des Faktors $\bar{d}$, die hier nicht wiedergegeben wird,

$$|\vec{j}| = \frac{2{,}48\cdot 10^{-17}|\vec{E}|^2}{W}\exp\left[-\frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\,\frac{W^{\frac{3}{2}}}{e|\vec{E}|}\right]\ \mathrm{Am^{-2}}.$$

Mit den entsprechenden Zahlenwerten für e, $\hbar$, m (W in eV ausgedrückt) folgt

$$|\vec{j}| = \frac{2{,}48\cdot 10^{-17}|\vec{E}|^2}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,W}\exp\left[-\frac{4\cdot\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}(1{,}6\cdot 10^{-19}\,W)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}|\vec{E}|}\right]\ \mathrm{Am^{-2}}$$

bzw.

$$|\vec{j}| = 1{,}55\cdot 10^2\,\frac{|\vec{E}|^2}{W}\exp\left[-\frac{6{,}85\cdot 10^9\,W^{\frac{3}{2}}}{|\vec{E}|}\right]\ \mathrm{Am^{-2}}.$$

Wir setzen die effektive Austrittsarbeit $W = 4$ eV ein und finden

$$j = 1{,}55\cdot 10^2\,\frac{|\vec{E}|^2}{4}\exp\left[-\frac{6{,}85\cdot 10^9\cdot 4^{\frac{3}{2}}}{|\vec{E}|}\right]\ \mathrm{Am^{-2}} =$$

$$= 38{,}7\,|\vec{E}|^2\exp\left[-\frac{54{,}8\cdot 10^9}{|\vec{E}|^2}\right]\mathrm{Am^{-2}} = 38{,}7\,|\vec{E}|^2\cdot 10^{-\frac{54{,}8\cdot 10^9}{|\vec{E}|\ln 10}} = \mathrm{Am^{-2}}$$

$$= 38{,}7\,|\vec{E}|^2\cdot 10^{-\frac{23{,}8\cdot 10^9}{|\vec{E}|}}\ \mathrm{Am^{-2}}.$$

Hiernach ist zu erwarten, daß erst von Feldstärken der Größenordnung $|\vec{E}| = 10^8\cdots$ $\cdots 10^9\ \mathrm{V\,m^{-1}}$ an bei Wolfram eine kalte Emission nachweisbar wird.

A Aufgaben

271. Untersuchen Sie, ob der Operator $A = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ein HERMITEscher Operator ist.

272. Untersuchen Sie, ob die folgenden Operatoren HERMITEsche Operatoren sind:

$$A = \sqrt[2]{}, \quad B = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$C = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad D = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}.$$

273. Zeigen Sie, daß die Anwendung des Operators $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x$ auf die Funktion e^x ein anderes Ergebnis liefert als die Anwendung des Operators $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

274. Zu welchem Ergebnis führt die Anwendung des Operators $L = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right)^2$ auf die Funktion $u(x) = \sin x$?

275. Unter welcher Bedingung ist es gestattet, den Operator $F^2 - G^2$ in $(F + G)(F - G)$ umzuformen?

276. Untersuchen Sie, ob die kinetische Energie und eine Ortskoordinate gleichzeitig gemessen werden können. Was folgt daraus zur Frage der gleichzeitigen Meßbarkeit von kinetischer und potentieller Energie?

277. Untersuchen Sie, mit welchen Ortskoordinaten die Komponente $\vec{L}_x$ des Drehimpulses gleichzeitig gemessen werden kann.

278. Untersuchen Sie, mit welchen Impulskoordinaten die Komponente $\vec{L}_x$ des Drehimpulses gleichzeitig gemessen werden kann.

279. Berechnen Sie das Quadrat des Drehimpulses in cartesischen Koordinaten.

280. Untersuchen Sie, ob das Quadrat des Drehimpulses gleichzeitig mit einer Komponente des Drehimpulses gemessen werden kann.

281. Lösen Sie die SCHRÖDINGER-Gleichung unter der Voraussetzung, daß die betrachteten Teilchen keinen äußeren Kräften unterliegen, d. h., daß die potentielle Energie $E_p = 0$ ist. Weiter sei vorausgesetzt, daß eine räumliche Abhängigkeit nur von der Variablen x besteht.

282. Der Grundzustand des Wasserstoffatoms sei durch die Funktion

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1^3}}\, \mathrm{e}^{-\frac{r}{a_1}}$$

bestimmt. Errechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Bereich $\mathrm{d}r = a_1 \pm 3 \cdot 10^{-12}$ m anzutreffen ($a_1 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m).

283. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im Grundzustand des Wasserstoffatoms das Elektron im Abstand $r > 2a_1$ anzutreffen?

284. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im Grundzustand des Wasserstoffatoms das Elektron im Abstand $a_1 < r < 2a_1$ anzutreffen?

285. Normieren Sie die Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\psi = C\left(2 - \frac{r}{a_1}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a_1}}.$$

286. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, für den in Aufg. 542 angegebenen Quantenzustand das Elektron im Raum $4a_1 < r < 4{,}05\, a_1$ anzutreffen.

287. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem in der ersten Grundschwingung befindlichen harmonischen Oszillator das betrachtete Teilchen im Inter-

vall $x_0 < x < 1{,}1\, x_0$ anzutreffen?

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\,\omega_0}}.$$

288. Für einen in der ersten Grundschwingung befindlichen Oszillator sei $\omega_0 = 2{,}95 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$. Die reduzierte Masse zweier gegeneinander schwingender Sauerstoffatome ist $m = 13{,}3 \cdot 10^{-27}$ kg. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Auslenkung im Bereich $1{,}55 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m} < x < 1{,}60 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}$ anzutreffen?
289. Berechnen Sie die Durchlässigkeit d einer Potentialschwelle der Höhe $E_0 = 300$ eV, der Breite $l = 10^{-10}$ m für Elektronen mit der Energie $E = 400$ eV.
290. Berechnen Sie die Durchlässigkeit d und das Reflexionsvermögen r einer Potentialschwelle der Höhe $E_0 = 300$ eV und der Breite $l = 10^{-11}$ m für Elektronen der Energie $E = 100$ eV.
291. Wie verändert sich die Durchlässigkeit der Schwelle in Aufgabe 290, wenn sich die Schwellenbreite auf $l = 10^{-10}$ m verändert?
292. Eine Potentialschwelle habe die Höhe $E_0 = 200$ eV, die Elektronenenergie sei $E = 100$ eV. Welche Breite l müßte die Schwelle haben, damit 50% der einfallenden Elektronen reflektiert werden?
293. Eine Potentialschwelle habe die Höhe $E_0 = 10$ MeV, die Breite $l = 3 \cdot 10^{-14}$ m. Wie groß ist ihre Durchlässigkeit für α-Teilchen der Energie $E = 4{,}8$ MeV? Schätzen Sie die Zerfallskonstante $\lambda = n_s d$ und die Halbwertzeit $T_{1/2}$ ab. Die Größe $n_s = v/2r_0$ gibt die Zahl der Stöße an, die ein im Kern enthaltenes α-Teilchen je Sekunde auf den Potentialwall ausübt; die Geschwindigkeit v folgt aus der Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle. Die Wellenlänge ist größenordnungsmäßig gleich dem Kerndurchmesser $2r_0 \approx 2 \cdot 10^{-14}$ m. Zur Ableitung der Halbwertzeit beachte man das Zerfallsgesetz $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$.
294. Die effektive Austrittsarbeit des Nickels werde $W_{eff} = 10$ eV gesetzt. Welche Spannung muß angelegt werden, um einen durch kalte Emission entstehenden Elektronenstrom nachweisen zu können?
295. Bestimmen Sie die Energieniveaus und die Lösungsfunktionen für das in Bild 122 dargestellte Potential unter der Voraussetzung $E < E_0$.

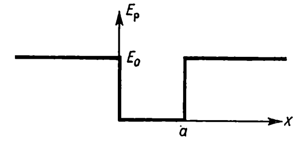


Bild 122

296. Aus der allgemeinen Formel für den Mittelwert einer Quantengröße L ist die zeitliche Ableitung des zugeordneten HERMITEschen Operators L zu bestimmen.
297. Bestimmen Sie die zeitliche Ableitung eines von der Zeit t nicht explizit abhängigen HERMITEschen Operators $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{AB}$.
298. Berechnen Sie die zeitliche Ableitung der Koordinaten x, y, z.
299. Berechnen Sie die zeitliche Ableitung des Impulsoperators.

4.3. Das Spektrum des Wasserstoffs und der wasserstoffähnlichen Atome

Für die Untersuchung kugelsymmetrischer Probleme wird der **Laplace-Operator** in Kugelkoordinaten dargestellt:

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\,\Delta_{\vartheta,\varphi},$$

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right), \quad \Delta_{\vartheta,\varphi} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Zwischen den verwendeten cartesischen Koordinaten x, y, z und den eingeführten Kugelkoordinaten r, ϑ, φ bestehen dabei (Bild 123) die Beziehungen

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta.$$

Aus der Darstellung des LAPLACE-Operators in Kugelkoordinaten folgt für den Operator $\boldsymbol{T}_r$ des nur vom Radius r abhängigen Anteils der kinetischen Energie

$$\boldsymbol{T}_r = \boldsymbol{T}_r(r) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r,$$

während das Quadrat des Drehimpulses mit dem Operator

$$\vec{\boldsymbol{L}}^2 = \vec{\boldsymbol{L}}^2(\vartheta,\varphi) = -\hbar^2\Delta_{\vartheta,\varphi}$$

verknüpft ist.

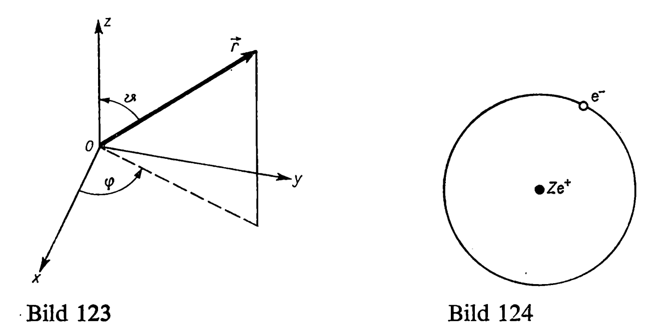


Bild 123 Bild 124

Bei Verwendung dieser beiden Operatoren erhält die SCHRÖDINGER-Gleichung für stationäre Zustände die Form

$$\boldsymbol{T}_r\psi + \frac{\vec{\boldsymbol{L}}^2\psi}{2mr^2} + (E_p - E)\psi = 0.$$

Beim Wasserstoff und bei den wasserstoffähnlichen Atomen wird die Kernladung ze^+ von einem Elektron e^- umkreist (Bild 124). Die potentielle Energie des Elektrons ist

$$E_p = -\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Zur Berücksichtigung der Kernmasse m_k wird im folgenden die Elektronenmasse m durch die *reduzierte Masse*

$$\mu = \frac{m m_k}{m + m_k}$$

ersetzt. Des weiteren wird die Variable

$$\varrho = \frac{2\sqrt{-2\mu E}}{\hbar} r = \frac{2zr}{n a_1}$$

eingeführt, wobei

$$a_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2}$$

den Radius der innersten Elektronenbahn des Wasserstoffs nach der BOHRschen Theorie angibt.

Damit erhält die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung die Form

$$\psi = \psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi) = C_{n,l,m} P_l^{|m|} (\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}\, e^{-\frac{\varrho}{2}} \varrho^l L_{n+l}^{2l+1}(\varrho).$$

Hierin bedeutet

$$L_k^s(\xi) = \frac{d^s}{d\xi^s} L_k(\xi)$$

das LAGUERREsche Polynom, wobei

$$L_k(\xi) = e^{\xi} \frac{d^k}{d\xi^k} (e^{-\xi} \xi^k)$$

ein Polynom k-ten Grades ist. Der Ausdruck

$$P_l^{|m|}(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{d\xi^{|m|}} P_l(\xi)$$

gibt die zugeordnete (tesserale) Kugelfunktion der (zonalen) Kugelfunktion l-ten Grades

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l}{d\xi^l} [(\xi^2 - 1)^l]$$

an.

Die **Hauptquantenzahl** n bestimmt das Energieniveau

$$E = E_n = -\frac{z^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

die **Nebenquantenzahl** l das Quadrat des Drehimpulses

$$\vec{L}^2 = \vec{L}_l^2 = \hbar^2 l(l+1), \qquad l = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

die **magnetische Quantenzahl** m die z-Komponente des Drehimpulses

$$L_z = \hbar m, \qquad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l.$$

Das Eigenwertproblem

$$\vec{L}^2 \psi = \vec{L}_l^2 \psi$$

wird durch die Eigenwerte $\vec{L}^2 = \vec{L}_l^2$ und durch die Eigenfunktionen

$$\psi = \psi_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l-|m|)!\,(2l+1)}{(l+|m|)!\,4\pi}}\, P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

gelöst. Der Faktor vor der Klammer ist dabei so gewählt, daß die Eigenfunktionen $\psi_{l,m}$ auf der Kugeloberfläche mit dem Wert 1 normiert sind. Es gilt

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \psi_{l',m'}(\vartheta, \varphi)\, \psi_{l,m}(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \delta_{l,l'}\, \delta_{m,m'}.$$

Dabei bedeutet

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} +1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

das **Kroneckersymbol.**

Zur Charakterisierung der Quantenzustände verwendet man Kurzbezeichnungen: Die erste Größe gibt die Hauptquantenzahl n an. Die zweite Bezeichnung steht für die Nebenquantenzahl l. Der Zustand $l = 0$ wird mit dem Symbol s, $l = 1$ mit p, $l = 2$ mit d, $l = 3$ mit f, $l = 4$ mit g usw. bezeichnet.

B Beispiele

214. Fertigen Sie eine Skizze der Spektrallinien des Wasserstoffatoms an.

Lösung

Das Energieniveau des Elektrons im Atom ist durch die Formel

$$E = E_n = -\frac{z^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2}\, \frac{1}{n^2}$$

bestimmt, wobei für Wasserstoff $z = 1$ zu setzen ist. Im Falle $n = 1$ erhalten wir

$$E_1 = -\frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{(4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12})^2 \cdot 2 \cdot (1{,}05 \cdot 10^{-34})^2}\ \mathrm{J} = -21{,}8 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} =$$

$$= -21{,}8 \cdot 10^{-19} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{18}\ \mathrm{eV} = -13{,}6\ \mathrm{eV}.$$

Dabei wurde in erster Näherung die reduzierte Masse gleich der Elektronenmasse gesetzt. Die Energie von 13,6 eV ist aufzuwenden, um das Elektron vom Wasserstoffatom abzutrennen, es ist die **Ionisierungsenergie** des Wasserstoffs.

Für den Fall $n = 2$ erhalten wir demgemäß

$$E_2 = -\frac{z^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2}\, \frac{1}{2^2} =$$

$$= \frac{-13{,}6}{4}\ \mathrm{eV} = -3{,}4\ \mathrm{eV},$$

das ist ein Viertel des Wertes für $n = 1$. In gleicher Weise folgen die Energiewerte für die Hauptquantenzahlen $n = 3, 4, 5, \cdots$. Für eine graphische Darstellung der Energiezustände wählen wir das Niveau des Zustandes $n = 1$ als Nullinie. Der Fall $n = 2$ entspricht somit einem Energieniveau von $-3{,}4 - (-13{,}6)$ eV $=$ $= 10{,}2$ eV. Für $n \to \infty$ nähert sich das Energieniveau dem Grenzwert 13,6 eV (Bild 125).

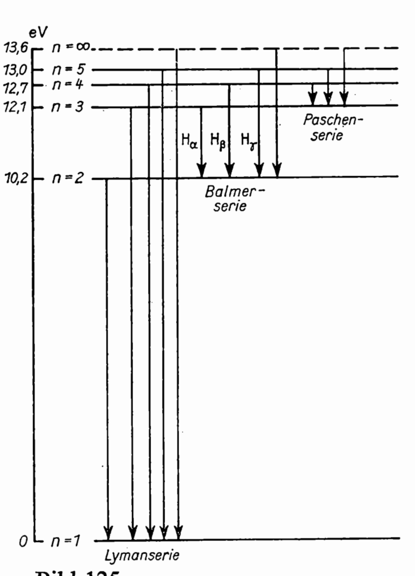


Bild 125

Wenn das Elektron aus einem Zustand $n = n_a$ in einen anderen Zustand $n = n_e$ springt, wird bei $n_a > n_e$ Strahlung emittiert. Die Frequenz der emittierten Strahlung ergibt sich nach dem **Bohrschen Postulat** zu

$$h\nu = E_a - E_e = \frac{z^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, \hbar^2}\left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_a^2}\right).$$

Nach ihrem Endzustand n_e werden die emittierten Spektrallinien in Serien zusammengefaßt. In Bild 125 ist auch die BALMER-Serie dargestellt, die alle auf dem Zustand $n_e = 2$ endenden Spektrallinien enthält.

215. Berechnen Sie die Wellenlänge der H_α-Linie in Luft unter Normalverhältnissen. Die Brechzahl der Luft beträgt dabei $n_L = 1{,}000293$.

Lösung

Nach Beispiel 214 ist die Frequenz der emittierten Linie durch die Beziehung

$$h\nu = E_a - E_e = \frac{z^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2}\left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_a^2}\right) \tag{1}$$

bestimmt. Wir legen der Berechnung die Wellenzahl $\bar{\nu} = \nu/c$ zugrunde und erhalten

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} = z^2 R \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_a^2}\right), \qquad (2)$$

wobei

$$R = \frac{2\pi^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)\, h^3 c} = \frac{e^4 \mu}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \qquad (3)$$

die RYDBERG-Zahl angibt.
Wir berücksichtigen, daß für Wasserstoff gilt

$$\mu = \frac{m m_H}{m_H + m} = m \frac{1}{1 + \frac{m}{m_H}} = m \frac{1}{1 + \frac{1}{1836}}, \qquad (4)$$

und es folgt

$$R_H = \frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}}{8\,(8{,}854 \cdot 10^{-12})^2\,(6{,}624 \cdot 10^{-34})^3 \cdot 2{,}997 \cdot 10^8} \frac{1}{1 + \frac{1}{1836}} \text{ m}^{-1}. \qquad (5)$$

Als genauer Wert für die RYDBERG-Zahl des Wasserstoffatoms im Vakuum ergibt sich hiermit

$$R_H = 1{,}09677 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}. \qquad (6)$$

Die Wellenlänge der emittierten Linie werde im Vakuum mit λ, in Luft dagegen mit λ_L bezeichnet. Aus den Gln. (2) u. (3) folgt damit

$$\frac{\lambda}{\lambda_L} = n_L = \frac{R_{HL}}{R_H}. \qquad (7)$$

Dabei bezeichnet R_H die RYDBERG-Zahl für Strahlung im Vakuum, R_{HL} für Strahlung in Luft.
Wir erhalten damit aus den Gln. (6) u. (7)

$$R_{HL} = n_L R_H = 1{,}000293 \cdot 1{,}09677 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} = 1{,}09709 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}. \qquad (8)$$

Bei Emission der H_α-Linie ist $n_a = 3$, $n_e = 2$, ferner $z = 1$. Damit folgt

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_{HL}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 1{,}09709 \cdot 10^7 \cdot \frac{5}{36} \text{m}^{-1} = 0{,}152374 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \qquad (9)$$

und

$$\lambda_{H\alpha} = \frac{7{,}2 \cdot 10^{-7}}{1{,}09709} \text{ m} = \underline{6562{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ m}}. \qquad (10)$$

216. Für einfach ionisiertes Helium werde eine Linie der Wellenlänge $\lambda_{He} = 6560{,}4 \cdot 10^{-10}$ m gemessen. Sie entspricht dem Übergang von $n_a = 6$ auf $n_e = 4$. Die Messung der H_α-Linie ergebe die Wellenlänge $\lambda_H = 6563{,}1 \cdot 10^{-10}$ m. Berechnen Sie daraus die RYDBERG-Zahl für das Spektrum des einfach ionisierten Heliums. Für Vakuum ist $R_H = 1{,}09677 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

Lösung

Die Wellenlänge der vom Helium emittierten Strahlung bestimmt sich aus

$$\frac{1}{\lambda_{He}} = z^2 R_{He}\left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_a^2}\right) = 4R_{He}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2}\right) = R_{He}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{36} R_{He}.$$

Für die H_α-Linie gilt die Beziehung

$$\frac{1}{\lambda_H} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36} R_H.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\lambda_H}{\lambda_{He}} = \frac{R_{He}}{R_H}.$$

Korrekturen infolge der Einwirkung des umgebenden Mediums heben sich auf. Die RYDBERG-Zahl des einfach ionisierten Heliums im Vakuum ergibt sich damit zu

$$R_{He} = R_H \frac{\lambda_H}{\lambda_{He}} = 1{,}09677 \cdot 10^7 \frac{6563{,}1}{6560{,}4} \text{ m}^{-1} = \underline{1{,}09722 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}}.$$

217. Aus den Werten der RYDBERG-Zahl für Wasserstoff und für einfach ionisiertes Helium ist die Elektronenmasse zu bestimmen.
Die Kernmasse des Heliumatoms ist $m_{He} = m_\alpha = 6{,}6447 \cdot 10^{-27}$kg, die Kernmasse des Wasserstoffatoms $m_H = m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg. Für die betreffenden RYDBERG-Zahlen gelten die genauen Werte $R_H = 1{,}0967757 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$, $R_{He} = 1{,}0972226 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

Lösung

Die RYDBERG-Zahl ist durch den Ausdruck

$$R = \frac{e^4 \mu}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

definiert, wobei

$$\mu = \frac{m m_k}{m + m_k}$$

die reduzierte Masse angibt.
Wir bestimmen das Verhältnis der RYDBERG-Zahlen von einfach ionisiertem Helium und Wasserstoff:

$$\frac{R_{He}}{R_H} = \frac{\mu_{He}}{\mu_H} = \frac{\dfrac{m m_{He}}{m_{He} + m}}{\dfrac{m m_H}{m_H + m}} = \frac{m_{He}(m_H + m)}{m_H(m_{He} + m)}.$$

Wir lösen diese Beziehung nach m auf und erhalten

$$m = \frac{R_{He} - R_H}{\dfrac{R_H}{m_H} - \dfrac{R_{He}}{m_{He}}},$$

in Zahlen

$$m = \frac{1{,}0972226 - 1{,}0967757}{(0{,}65573 - 0{,}16513) \cdot 10^{27}} \text{ kg} = \underline{9{,}109 \cdot 10^{-31} \text{ kg.}}$$

218. Bestimmen Sie den Operator L_z der z-Komponente des Drehimpulses in Kugelkoordinaten.

Lösung

Gemäß Beispiel 199 gilt in cartesischen Koordinaten

$$L_z = xp_y - yp_x = -\mathrm{i}\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Wenn wir voraussetzen, daß r und ϑ konstant sind und nur φ sich ändert, so folgt

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Wir setzen den Zusammenhang von cartesischen und Kugelkoordinaten ein und erhalten

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \psi}{\partial x}(-r\sin\vartheta\sin\varphi) + \frac{\partial \psi}{\partial y} r\sin\vartheta\cos\varphi = -y\frac{\partial \psi}{\partial x} + x\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

d. h.

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Daraus folgt

$$L_z = -\mathrm{i}\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = \underline{-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}}.$$

219. Lösen Sie die Eigenwertgleichung $L_z\psi = L_z\psi$ und bestimmen Sie die Eigenwerte L_z.

Lösung

Es ist

$$L_z = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Somit lautet die Eigenwertgleichung

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = L_z\psi.$$

Die Lösung mit Hilfe eines Exponentialansatzes bringt das Resultat

$$\psi = \text{const} \cdot \exp\left[\frac{\mathrm{i}\, L_z \varphi}{\hbar}\right].$$

Wenn diese Funktion eindeutig sein soll, muß der Bruch $L_z/\hbar$ ganzzahlig sein. Daraus folgt

$$\underline{L_z = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots}$$

220. Es ist zu zeigen, daß die Lösung $\psi = \psi_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ der Eigenwertgleichung $\vec{L}^2\psi = \vec{L}^2\psi$ auch eine Lösung der Eigenwertgleichung $L_z\psi = L_z\psi$ ist. Was folgt daraus bezüglich L^2 und L_z?

Lösung

Der Ausdruck

$$\psi_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \text{const}\, P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

ist eine Lösung der Differentialgleichung $\vec{L}^2\psi = \vec{L}^2\psi$. Wenn wir diese Lösungsfunktion in die Gleichung $L_z\psi = L_z\psi$ einsetzen, erhalten wir

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\text{const}\, P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\right] = L_z\, \text{const}\, P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},$$

d. h. auf beiden Seiten gekürzt,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} = L_z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

oder

$$\hbar m = L_z.$$

Das Quadrat des Drehimpulses $\vec{L}^2$ und die Komponente L_z sind also in dem durch $\psi_{m,l}$ repräsentierten Quantenzustand gleichzeitig meßbar.

221. Untersuchen Sie, ob die durch den HAMILTON-Operator H dargestellte Gesamtenergie und das Quadrat des Drehimpulses $\vec{L}^2$ gleichzeitig gemessen werden können. Welche Schlußfolgerungen ergeben sich daraus für die SCHRÖDINGER-Gleichung?

Lösung

Es gilt

$$H = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\Delta + E_\mathrm{p}(r, \vartheta, \varphi).$$

Der LAPLACE-Operator Δ wird zerlegt in

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\,\Delta_{\vartheta,\varphi}.$$

Damit ergibt sich

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\Delta_r + \frac{\Delta_{\vartheta,\varphi}}{r^2}\right) + E_p(r,\vartheta,\varphi) = T_r(r) + \frac{\vec{L}^2(\vartheta,\varphi)}{2\mu r^2} + E_p(r,\vartheta,\varphi).$$

Da L^2 nur von den Winkelvariablen ϑ und φ, T_r dagegen von r abhängt, folgt

$$H\vec{L}^2 - \vec{L}^2 H = E_p\vec{L}^2 - \vec{L}^2 E_p.$$

Dieser Ausdruck ist Null, wenn die potentielle Energie nicht von den Winkelvariablen ϑ und φ abhängt. Das gilt z. B. für Zentralkräfte. Bei Zentralkräften mit einem Potential $E_p = E_p(r)$ ist also

$$H\vec{L}^2 - \vec{L}^2 H = 0.$$

In diesem Falle sind Gesamtenergie und der Betrag des Drehimpulsvektors gleichzeitig meßbar. Das bedeutet, daß auch die Eigenfunktionen der beiden Eigenwertgleichungen

$$H\psi = E\psi \quad \text{und} \quad \vec{L}^2\psi = \vec{L}^2\psi$$

übereinstimmen. Die erste der beiden Beziehungen ist die SCHRÖDINGER-Gleichung für stationäre Zustände:

$$T_r\psi + \frac{L^2\psi}{2\mu r^2} + (E_p - E)\,\psi = 0.$$

Hierin kann man also wegen der zweiten Eigenwertgleichung den Differentialausdruck $\vec{L}^2\psi$ durch $\vec{L}^2\psi = l(l+1)\hbar^2\psi$ ersetzen. Für den Fall $E_p = E_p(r)$ folgt damit die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$T_r\psi + \frac{l(l+1)\,\hbar^2}{2\mu r^2}\,\psi + (E_p - E)\,\psi = 0.$$

Sie enthält nur noch r als unabhängige Variable.

222. Es ist die SCHRÖDINGER-Gleichung für ein wasserstoffähnliches Atom mit dem Potential

$$E_p = -\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

zu lösen. Dabei ist vorauszusetzen, daß $\psi(0)$ einen endlichen Wert annimmt und $\lim_{r\to\infty} \psi = 0$ gilt. Der Bahndrehimpuls sei Null.

Lösung

Wegen $l = 0$ sowie

$$T_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\Delta_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

erhalten wir die SCHRÖDINGER-Gleichung in der Form

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\psi}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + E\right)\psi = 0.$$

Weiter definieren wir zur Vereinfachung

$$\lambda = \frac{2E\mu}{\hbar^2}, \quad \alpha = \frac{ze^2\mu}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} + \left(\frac{2\alpha}{r} + \lambda\right)\psi = 0.$$

Aus dem Lösungsansatz

$$\psi = e^{-\beta r}$$

folgt

$$\beta^2 - \frac{2\beta}{r} + \frac{2\alpha}{r} + \lambda = 0.$$

Hieraus erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$\alpha = \beta, \quad \lambda = -\beta^2 = -\alpha^2.$$

Wir setzen

$$a_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2\mu} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{2zr}{a_1}.$$

Dabei gibt a_1 gemäß der BOHRschen Theorie den Radius der innersten Elektronenbahn des Wasserstoffatoms an (vgl. Beispiel 192). Die reduzierte Masse

$$\mu = \frac{mm_k}{m + m_k} = \frac{m}{1 + \frac{m}{m_k}}$$

kann in erster Näherung der Elektronenmasse m gleichgesetzt werden, da für Wasserstoff

$$\frac{m}{m_k} = \frac{1}{1836} \ll 1$$

ist.

Wir schreiben die gefundene Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung in der Form

$$\psi = C\,e^{-\frac{zr}{a_1}} = C\,e^{-\frac{\varrho}{2}}, \quad \varrho = \frac{2z}{a_1}r.$$

Die Normierungsbedingung erfordert wegen

$$d\tau = 4\pi r^2\,dr$$

$$\int \psi\psi^*\,d\tau = 4\pi\,|C|^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2zr}{a_1}}\,r^2\,dr = 4\pi\,|C|^2\,\frac{2!}{\left(\frac{2z}{a_1}\right)^3} = 1.$$

Hieraus folgt

$$|C| = \sqrt{\frac{z^3}{a_1^3\pi}}.$$

Aus der Beziehung $\lambda = -\alpha^2$ ergibt sich das Energieniveau

$$E = \frac{z^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2}.$$

Nach der BOHRschen Theorie entspricht das dem Grundzustand.

223. Es ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für den Grundzustand des Wasserstoffatoms zu bestimmen. In welchem Abstand hat die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(r)$ ihr Maximum?

Lösung

Der Grundzustand des Wasserstoffs wird für die Quantenzahlen $n = 1$, $l = 0$, $m = 0$ angenommen. Für diesen Fall lautet die allgemeine Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\psi_{1,0,0} = C_{1,0,0} P_0^0 (\cos\vartheta)\, e^{-\frac{\varrho}{2}} L_1^1(\varrho)$$

mit

$$E = E_1 = -\frac{e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2}.$$

Für das LAGUERREsche Polynom folgt nach Definition

$$L_1^1(\varrho) = \frac{d}{d\varrho} L_1(\varrho), \quad L_1(\varrho) = e^{\varrho} \frac{d}{d\varrho}(e^{-\varrho}\varrho) = 1 - \varrho.$$

Damit erhalten wir

$$L_1^1(\varrho) = -1.$$

Die Kugelfunktion P_0^0 ist gleich eins. Somit ergibt sich

$$\psi_{1,0,0} = -C_{1,0,0}\, e^{-\frac{\varrho}{2}}.$$

Diese Funktion stimmt mit der in Beispiel 222 direkt aus der SCHRÖDINGER-Gleichung abgeleiteten Lösung überein.
Als Normierungskonstante erhalten wir

$$|C_{1,0,0}| = \sqrt{\frac{1}{\pi a_1^3}}.$$

Wir berechnen die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Volumen einer Kugelschale $d\tau = 4\pi r^2\, dr$. Für die gesuchte Aufenthaltswahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\psi\psi^*\, d\tau = \frac{1}{a_1^3 \pi} e^{-\varrho}\, 4\pi r^2\, dr = \frac{4}{a_1^3} e^{-\frac{2r}{a_1}} r^2\, dr = w(r)\, dr.$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(r)$ nimmt Extremwerte an für

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 e^{-\frac{2r}{a_1}}\right) = 0.$$

Daraus folgt die Beziehung

$$e^{-\frac{2r}{a_1}} 2r\left(1-\frac{r}{a_1}\right)=0.$$

Für die Fälle $r = 0$ und $r = \infty$ ergibt sich $w(r) = 0$, d. h., die Wahrscheinlichkeitsdichte nimmt hier ihre geringsten Werte an. Dagegen erhalten wir für

$$\underline{r = a_1}$$

das Maximum.
Der innerste Bahnradius nach der BOHRschen Theorie ergibt also gerade das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte für den Grundzustand.

224. Wo liegt das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte bei Wasserstoff im Quantenzustand $2s$ ($n = 2$, $l = 0$)?

Lösung

Bei der Untersuchung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi\psi^*$ interessieren nur die r-abhängigen Glieder. Entsprechend der allgemeinen Lösung werden diese durch die Quantenzahlen n und l bestimmt. Daher ist die magnetische Quantenzahl m ohne Einfluß auf $\psi\psi^*$. Im Fall $n = 2$, $l = 0$ erhalten wir

$$\psi_{2,0,0} = \text{const } e^{-\frac{\varrho}{2}} L_2^1(\varrho)$$

mit

$$\varrho = \frac{r}{a_1}.$$

Das LAGUERREsche Polynom ergibt sich aus

$$L_2^1(\varrho) = \frac{d}{d\varrho}\left[e^{\varrho}\frac{d^2}{d\varrho^2}(e^{-\varrho}\varrho^2)\right] = 2\varrho - 4.$$

Somit folgt

$$\psi_{2,0,0} \sim (\varrho - 2)\, e^{-\frac{\varrho}{2}},$$

$$\psi_{2,0,0}\,\psi^*_{2,0,0}\, r^2\, dr \sim \left(\frac{r}{a_1} - 2\right)^2 r^2\, e^{-\frac{r}{a_1}}\, dr = w(r)\, dr.$$

Die Forderung

$$\frac{dw}{dr} = 0$$

führt zu

$$\left(\frac{r^2}{a_1^2} - 6\frac{r}{a_1} + 4\right)\left(\frac{r}{a_1} - 2\right) = 0.$$

Wir setzen die ermittelten Nullstellen der Gleichung in die zweite Ableitung ein und erhalten als Lösung ein Minimum bei

$$r = r_{\min} = 2a_1,$$

ein kleineres Maximum bei

$$r = r_{\max 1} = 0{,}764\, a_1$$

und ein größeres Maximum bei

$$r = r_{\max 2} = 5{,}236\, a_1 \qquad \text{(Bild 126)}.$$

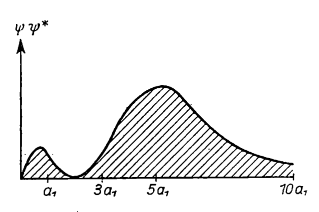


Bild 126

225. Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{r}$ des Elektronenabstandes im Grundzustand des Wasserstoffatoms.

Lösung

Der Mittelwert $\bar{L}$ einer physikalischen Größe ergibt sich aus

$$\bar{L} = \int \psi^* L \psi \, \mathrm{d}\tau .$$

Wir setzen für ψ die Lösungsfunktion der Schrödinger-Gleichung

$$\psi_{1,0,0} = \sqrt{\frac{1}{\pi a_1^3}}\, \mathrm{e}^{-\frac{r}{a_1}}$$

ein. Für den Operator L der Ortskoordinate haben wir die Ortskoordinate selbst einzusetzen: r. Damit folgt

$$\bar{r} = \int_0^\infty |\psi_{1,0,0}|^2\, r\, 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{4}{a_1^3} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_1}} r^3 \, \mathrm{d}r .$$

Den Wert des bestimmten Integrals erhalten wir aus

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x} x^n \, \mathrm{d}x = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} .$$

Damit ergibt sich

$$\bar{r} = \frac{4}{a_1^3} \frac{3!}{\left(\frac{2}{a_1}\right)^4} = \frac{3}{2} a_1 = \frac{3}{2} \cdot 0{,}529 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} = \underline{0{,}793 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}}.$$

Der Mittelwert des Elektronenabstands unterscheidet sich also vom Abstand der größten Wahrscheinlichkeitsdichte.

226. Berechnen Sie den Mittelwert der z-Komponente des Drehimpulses beim Wasserstoffatom im Zustand $n = 2$, $l = 1$, $m = 1$.

Lösung

Die Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung lautet

$$\psi_{2,1,1} = C_{2,1,1} P_1^{|1|} (\cos\vartheta)\, e^{i\varphi}\, e^{-\frac{\varrho}{2}}\, \varrho L_3^3(\varrho).$$

Für die Kugelfunktion folgt

$$P_1^1(\xi) = \sqrt{1-\xi^2}\, \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2}\, \frac{d}{d\xi}\, [\xi^2 - 1]\right) = \sqrt{1-\xi^2}$$

$$P_1^1(\cos\vartheta) = \sin\vartheta.$$

Das LAGUERREsche Polynom ergibt

$$L_3^3(\varrho) = \frac{d^3}{d\varrho^3}\left[e^{\varrho}\, \frac{d^3}{d\varrho^3}\, (e^{-\varrho}\varrho^3)\right] = -6.$$

Wegen $\varrho = \frac{r}{a_1}$ lautet also die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\psi_{2,1,1} = -\frac{6\, C_{2,1,1}}{a_1} \sin\vartheta\, e^{i\varphi}\, r\, e^{-\frac{r}{2a_1}}.$$

Wir bestimmen die Normierungskonstante $C_{2,1,1}$.
Für das Raumelement $d\tau$ müssen wir wegen der Abhängigkeit von ϑ und φ setzen

$$d\tau = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr.$$

Es folgt damit die Bedingungsgleichung

$$\int \psi\psi^*\, d\tau = \frac{36}{a_1^2}\, |C_{2,1,1}|^2 \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, r^4\, e^{-\frac{r}{a_1}}\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = 1.$$

Wir erhalten

$$\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \frac{4}{3}, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \quad \int_0^{\infty} r^4\, e^{-\frac{r}{a_1}}\, dr = 24\, a_1^5.$$

Aus der Bedingungsgleichung für $C_{2,1,1}$ folgt demnach

$$|C_{2,1,1}| = \frac{1}{48\sqrt{\pi a_1^3}}.$$

Die Lösungsfunktion lautet somit

$$\psi_{2,1,1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi a_1^5}} \sin\vartheta\, e^{i\varphi}\, r\, e^{-\frac{r}{2a_1}}.$$

Entsprechend Beispiel 218 lautet der Operator L_z in Kugelkoordinaten

$$L_z = -i\hbar\, \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Für den gesuchten Mittelwert erhalten wir damit den Ausdruck

$$\overline{L}_z = \int \psi^* L_z \psi \,\mathrm{d}\tau = \frac{-\mathrm{i}\hbar}{64\pi a_1^5} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, r^4\, \mathrm{e}^{-\frac{r}{a_1}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi .$$

Die beiden inneren Integrale werden analog dem Verfahren bei der Normierung ausgewertet. Demnach verbleibt

$$\overline{L}_z = \frac{-\mathrm{i}\hbar}{64\pi a_1^5}\,\frac{4}{3}\,24 a_1^5 \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{i}\,\mathrm{d}\varphi = \hbar .$$

Mit der vorgegebenen magnetischen Quantenzahl $m = 1$ folgt also

$$\underline{\overline{L}_z = \hbar.}$$

227. Ein Elektron befinde sich im Quantenzustand $l = 1$, $m = 1$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{d}W$, das Elektron im Winkelbereich $\vartheta = 90° \pm 3°$ anzutreffen.

Lösung

Wir verwenden den von ϑ und φ abhängigen Teil der Lösungsfunktion $\psi_{n,l,m}$, die Funktion

$$\psi_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l-|m|)!\,(2l+1)}{(l+|m|)!\,4\pi}}\, P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}.$$

In der vorliegenden Darstellung erfüllt diese Funktion die Normierungsbedingung

$$\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \psi_{l,m}(\vartheta, \varphi)\, \psi_{l,m}^*(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 1.$$

Für den Fall $l = 1$, $m = 1$ erhalten wir wegen $0! = 1$ den Ausdruck

$$\mathrm{d}W = \psi_{1,1}(\vartheta, \varphi)\, \psi_{1,1}^*(\vartheta, \varphi)\, 2\pi \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$$

mit

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi}{30}.$$

Damit folgt für die Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{d}W = \frac{3}{8\pi} \sin^2\vartheta \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{3}{4}\,\frac{1}{30}\,\pi = 0{,}078,$$

also sind $\underline{7{,}8\,\%}$ aller Teilchen im Quantenzustand $l = 1$, $m = 1$ hiernach unter einem Winkel $\vartheta = 90° \pm 3°$ anzutreffen.

228. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W, das Elektron im Zustand $l = 1$, $m = 1$ unter einem Winkel zwischen $\vartheta = -60°$ und $\vartheta = +60°$ anzutreffen.

Lösung

Wir verwenden wieder die Lösungsfunktion

$$\psi_{1,1}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \sin \vartheta \, e^{i\varphi}$$

Wegen der Symmetrie bezüglich $\vartheta = 0$ können wir schreiben:

$$W = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \psi_{1,1}(\vartheta, \varphi) \, \psi_{1,1}^*(\vartheta,\varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi =$$

$$= 2 \frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ \left[-\frac{\cos \vartheta \sin^2 \vartheta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \vartheta \, d\vartheta \right\} = -\frac{1}{2} \left[\cos \vartheta \left(2 + \sin^2 \vartheta \right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

Wenn wir

$$\cos 60° = 0{,}5 \quad \text{und} \quad \sin^2 60° \doteq 0{,}75$$

einsetzen, so folgt

$$W = -\frac{1}{2} \, 0{,}5 \, (2 + 0{,}75) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 0{,}6875 = 0{,}3125.$$

Es befinden sich also <u>31,25%</u> aller Elektronen mit $l = 1$, $m = 1$ im angegebenen Winkelbereich $-60° < \vartheta < +60°$.

229. Bestimmen Sie die Extremwerte der Winkelverteilung im Zustand $l = 3$, $m = 2$.

Lösung

Die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron unter dem Raumwinkel $d\Omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ anzutreffen, ist

$$dW = w \, d\Omega = \psi\psi^* \, d\Omega.$$

Zur Lösung dieser Aufgabe haben wir also das Maximum der Funktion $w = \psi\psi^*$ zu bestimmen.

In der Lösungsfunktion $\psi_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ können wir die Normierungskonstante unberücksichtigt lassen und schreiben

$$\psi_{3,2}(\vartheta, \varphi) \sim P_3^{|2|} \, e^{2i\varphi} \sim \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \, e^{2i\varphi},$$

$$w = \psi_{3,2}(\vartheta, \varphi) \, \psi_{3,2}^*(\vartheta, \varphi) \sim \sin^4 \vartheta \cos^2 \vartheta.$$

Aus der Forderung, daß die erste Ableitung verschwinden muß, folgt

$$2 \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \, (2 \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) = 0.$$

Für $\vartheta = 0$ und für $\vartheta = \pi/2$ hat die Wahrscheinlichkeitsdichte w den Wert Null. Diese Winkel ergeben also Minima der Winkelverteilung. Das dazwischenliegende Maximum ist durch

$$2 \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta = 0$$

bestimmt.
Man erhält hiernach für

$$\vartheta = \arctan \sqrt{2} = \underline{54°44'}$$

das Maximum der Winkelverteilung.

230. Wegen des Elektronenspins $s = \pm\hbar/2$ gehören zu jedem Wertetripel n, l, m zwei Elektronenzustände. Weisen Sie aus den Lösungen der SCHRÖDINGER-Gleichung $\psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi)$ nach, daß zu jeder Hauptquantenzahl n insgesamt $2\,n^2$ Zustände gehören.

Lösung

Die drei Quantenzahlen n, l, m bestimmen die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\psi_{n,l\,m} \sim P_l^{|m|}(\cos \vartheta)\, e^{i|m|\varphi}\, e^{-\frac{\varrho}{2}}\, \varrho^l\, L_{n+l}^{2l+1}(\varrho).$$

Hierin gibt $P_l^{|m|}$ bis auf einen konstanten Faktor die $|m|$. Ableitung der Kugelfunktion P_l an. Aus der Definition

$$P_l(\xi) \sim \frac{d^l}{d\xi^l}\,(\xi^2 - 1)^l$$

folgt, daß P_l ein Polynom l. Grades ist. Die magnetische Quantenzahl m darf daher nur den Wertebereich

$$m = -l, -l + 1, \ldots, 0, \ldots, l - 1, l$$

durchlaufen.
Für $|m| > l$ wird $P_l^{|m|}$ identisch Null. Wir erhalten also als Wahrscheinlichkeit dafür, einen Zustand $|m| > l$ anzutreffen, den Wert Null. Zu jeder Quantenzahl l gehören somit $2l + 1$ Werte von m. Das LAGUERREsche Polynom L_{n+l}^{2l+1} ergibt sich aus der $(2l + 1)$. Ableitung eines Polynoms L_{n+l}. Dieses ist vom Grade $n + l$. Es muß demnach

$$2l + 1 \leqq n + l \quad \text{bzw.} \quad l \leqq n - 1$$

sein. Zudem ist die Quantenzahl l auf ganzzahlige positive Werte sowie den Wert Null beschränkt; sie durchläuft also den Wertebereich

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Demnach ist die Zahl der zu einer Hauptquantenzahl n gehörenden Quantenzustände gleich

$$N_n = 2\sum_{l=0}^{n-1}(2l + 1) = 2\,(1 + 3 + \ldots + 2n - 1) = \underline{2n^2}.$$

231. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten der Winkelverteilung für alle Zustände $l = 3$, und zeichnen Sie dazu die Polardiagramme

Lösung

Zu $l = 3$ gehören die Zustände $m = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Die dazugehörenden Lösungsfunktionen $\psi_{l,m}$ und die Wahrscheinlichkeitsdichten sind

m	$\psi_{l,m}$	$\psi_{l,m}\,\psi^*_{l,m}$
± 3	$\dfrac{\sqrt{35}}{8\sqrt{\pi}} \sin^3 \vartheta \, e^{\pm 3i\varphi}$	$\dfrac{35}{64\pi} \sin^6 \vartheta$
± 2	$\dfrac{\sqrt{105}}{4\sqrt{2\pi}} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \, e^{\pm 2i\varphi}$	$\dfrac{105}{32\pi} \sin^4 \vartheta \cos^2 \vartheta$
± 1	$\dfrac{\sqrt{21}}{8\sqrt{\pi}} \sin \vartheta \, (5 \cos^2 \vartheta - 1) \, e^{\pm i\varphi}$	$\dfrac{21}{64\pi} \sin^2 \vartheta \, (5 \cos^2 \vartheta - 1)^2$
0	$\dfrac{\sqrt{7}}{4\sqrt{\pi}} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta)$	$\dfrac{4}{16\pi} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta)^2$

In Bild 127 sind die dazugehörenden Polardiagramme dargestellt.

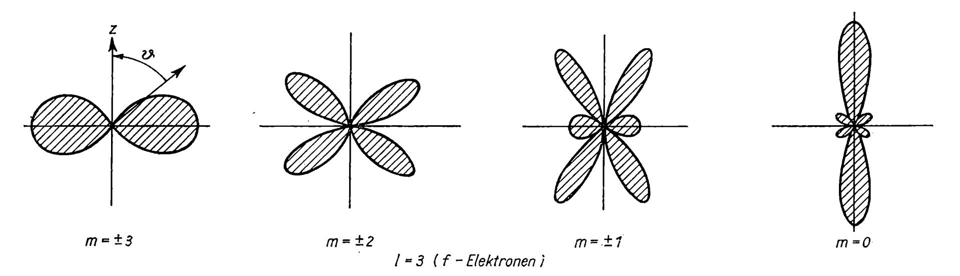


Bild 127

A Aufgaben

300. Berechnen Sie die Wellenlänge der H_β-Linie in Luft. ($n_a = 4, n_e = 2$, Brechzahl $n_L = 1{,}000293$)
301. Welche Wellenzahl hat die erste Linie der LYMAN-Serie im Vakuum? ($n_a = 2$, $n_e = 1$)
302. Welche Wellenzahl bezeichnet die Seriengrenze der PASCHEN-Serie im Vakuum? ($n_a = \infty$, $n_e = 3$)
303. Welche RYDBERG-Zahl ergibt sich für das Spektrum des Deuteriums im Vakuum? ($m_D = 3{,}34 \cdot 10^{-27}$ kg)
304. Berechnen Sie die RYDBERG-Zahl für den Fall einer unendlich großen Kernmasse. Ausbreitungsmedium sei Vakuum.
305. Berechnen Sie die Wellenlänge der H_γ-Linie des Deuteriumatoms in Luft. ($n_a = 5$, $n_e = 2$)
306. Wie lauten die Operatoren L_x und L_y in Kugelkoordinaten?
307. Untersuchen Sie, ob und für welche Quantenzahl die Funktion $\sin\vartheta\, e^{i\varphi}$ eine Lösung der Eigenwertgleichung $\vec{L}^2\psi = L^2\psi$ ist.
308. Zeigen Sie, daß $\sin\vartheta \sin\varphi - i\cos\vartheta$ Eigenfunktion des Operators L^2 ist. Für welche Operatorkomponente des Drehimpulses ist die Funktion $\sin\vartheta \sin\varphi - i\cos\vartheta$ zugleich Eigenfunktion?
309. Untersuchen Sie, zu welchen Operatoren des Drehimpulses oder seiner Komponenten der Ausdruck $\sin\vartheta\cos\varphi$ Eigenfunktion ist.
310. Wie lautet die Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung für $n = 2$, $l = 1$, $m = 1$? Bestimmen Sie die Normierungskonstante.
311. In welchem Abstand hat die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(r)$ im Zustand $2p$ ($n = 2$, $l = 1$) ihr Maximum?
312. Bestimmen Sie den Abstand größter Wahrscheinlichkeitsdichte $w(r)$ in den Zuständen $3d$ ($n = 3$, $l = 2$) und $4f$ ($n = 4$, $l = 3$).
313. Bestimmen Sie den Mittelwert $\bar{r}$ im Zustand $2p$ ($n = 2$, $l = 1$).
314. Bestimmen Sie den Mittelwert $\overline{\left(\frac{1}{r}\right)}$ im Zustand $2p$ ($n = 2$, $l = 1$).
315. Leiten Sie eine allgemeine Formel für den Mittelwert $\bar{r}$ für Wasserstoff und wasserstoffähnliche Atome im Quantenzustand n, l ab.
316. Berechnen Sie die Mittelwerte des Elektronenabstands für einfach ionisiertes Helium und für zweifach ionisiertes Lithium im Quantenzustand $2p$.
317. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron des Wasserstoffs im Quantenzustand $2p$ in einem Intervall $4a_1 < r < 4{,}1a_1$ anzutreffen?
318. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das im $2p$-Zustand befindliche Elektron des Wasserstoffatoms in einem Abstand $r > 9a_1$ anzutreffen.
319. Es ist die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, das Elektron des Wasserstoffatoms unter der Richtung $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = \pi/6$ im Raumwinkel
$$d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,\ d\vartheta = \frac{\pi}{18},\ d\varphi = \frac{\pi}{18}$$
im Quantenzustand $l = 1$, $m = -1$ anzutreffen.
320. Welche Winkelverteilung ergibt sich für den Fall $l = 0$, $m = 0$?
321. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten der Winkelverteilung für alle Fälle $l = 2$.
322. Bestimmen Sie die Extremwerte der Winkelverteilung für alle Fälle $l = 2$.
323. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron des Quantenzustands

$l = 2$, $m = 0$ in einem Winkelbereich $54°43' < \vartheta < 90°$ anzutreffen?

324. Bestimmen Sie unter Verwendung von Kugelkoordinaten die Komponenten der Stromdichte im Atom.

325. Es ist die mittlere Stromdichte in einem Wasserstoffatom, das sich im Quantenzustand $n = 2$, $l = 1$, $m = 1$ befindet, zu bestimmen. Die Stromdichte wird gesucht für die Werte $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi/2$, $r = 4a_1$.

326. Das durch den Strom des umlaufenden Elektrons hervorgerufene magnetische Moment $\vec{M}$ ist durch Integration zu berechnen.

4.4. Das Spektrum des zweiatomigen Moleküls — der starre Rotator und der harmonische Oszillator

In einem zweiatomigen Molekül (Bild 128) führen die Atome gegeneinander synchrone, harmonische Schwingungen aus (harmonischer Oszillator), wobei sie gleichzeitig mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine durch den gemeinsamen Schwerpunkt gehende Achse rotieren (Rotator).

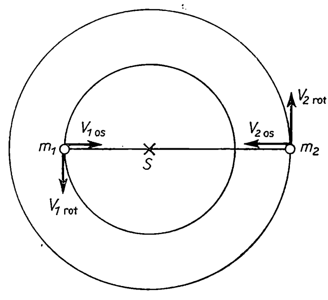


Bild 128

Somit setzt sich die Energie eines Elektrons im Molekül gemäß der Beziehung

$$E = E_{el} + E_{os} + E_{rot}$$

aus dem Energieniveau E_{el} des Elektrons in der Elektronenhülle, dem Energieniveau E_{os} der Oszillation und dem Energieniveau E_{rot} der Rotation zusammen. Für Wasserstoff und wasserstoffähnliche Atome ist das Energieniveau E_{el} aus 6.3. bekannt. Für das Energieniveau der Oszillation und für das der Rotation gelten die Formeln

$$E_{os} = \hbar\omega_0 \left(n + \tfrac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}, \qquad l = 0, 1, 2, \dots .$$

Hierin wurde mit n die Quantenzahl der Oszillation, mit l die der Rotation bezeichnet. ω_0 gibt die Kreisfrequenz der Oszillationsschwingung an, μ die reduzierte Masse des Moleküls, r den Kernabstand.

Als Wellenzahl der emittierten oder absorbierten Spektrallinie erhalten wir

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \bar{\nu}_{el} + \bar{\nu}_{os} + \bar{\nu}_{rot}.$$

Dabei gilt

$$\bar{\nu}_{\text{el}} = \frac{E'_{\text{el}} - E_{\text{el}}}{hc}, \quad \bar{\nu}_{\text{os}} = \frac{E'_n - E_n}{hc}, \quad \bar{\nu}_{\text{rot}} = \frac{E'_l - E_l}{hc}.$$

Gestrichene Größen gelten für den Zustand nach vollzogenem Quantensprung. Die Beobachtung der Rotations- und der Rotationsschwingungsbanden erfolgt im all-

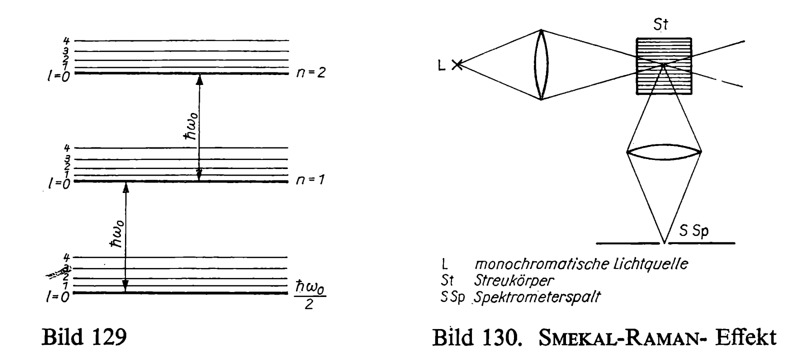


Bild 129

Bild 130. SMEKAL-RAMAN- Effekt

gemeinen über das Absorptionsspektrum, doch ist es für die Darstellung der Theorie zweckmäßig, von der Emission auszugehen.

Für die reinen **Rotationsbanden,** bei denen nur eine Änderung der Rotationsenergie erfolgt, gilt die Auswahlregel

$$\Delta l = l' - l = +1.$$

Bei den **Rotationsschwingungsbanden** ändern sich Rotations- und Oszillationsenergie, wobei das Oszillationsquant im allgemeinen um eine Größenordnung über dem Rotationsquant liegt (Bild 129). Für die Emission gelten daher die Auswahlregeln

$$\Delta n = +1; \quad \Delta l = \pm 1.$$

Der **Smekal-Raman-Effekt** (Bild 130) läßt sich quantentheoretisch deuten, indem man annimmt, daß die eingestrahlte Erregerfrequenz das getroffene Molekül unter Veränderung der Rotationsquantenzahl um ± 1 auf ein höheres Energieniveau hebt. Bei der nachfolgenden Ausstrahlung ändert sich die Rotationsquantenzahl erneut um ± 1. Hiermit ergeben sich die Auswahlregeln

$$\Delta l = -2 \quad (P\text{-Zweig}),$$

$$\Delta l = 0 \quad (Q\text{-Zweig}),$$

$$\Delta l = +2 \quad (R\text{-Zweig}).$$

Durch einen **Elektronensprung,** d. h. durch Änderung der Elektronenanordnung im Molekül, kann das **Bandenspektrum** in den sichtbaren und in den ultravioletten Bereich verschoben werden. Mit dem Elektronensprung verändert sich im allgemeinen auch das Massenträgheitsmoment des Moleküls. Entsprechend der Auswahlregel

$$\Delta l = \pm 1, 0$$

ergeben sich drei Zweige von Spektrallinien, deren systematische Ordnung im **Diagramm von Fortrat** angegeben wird.
Als Übergangswahrscheinlichkeit $A_{m,n}$ definieren wir die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Atom aus dem Zustand E_m spontan in den Zustand E_n übergeht. Indem wir diese Größe auf die Zeit von einer Sekunde beziehen, ergeben sich für $A_{m,n}$ Werte, die im allgemeinen größer als eins sind. Für die Übergangswahrscheinlichkeit gilt die Beziehung

$$A_{m,n} = \frac{e^2}{3\pi\varepsilon_0 \hbar^4 c^3} |E_m - E_n|^3 \left(\int \psi_m^* r \psi_n \, \mathrm{d}\tau\right)^2.$$

Darin werden die Komponenten

$$x_{m,n} = \int \psi_m^* x \psi_n \, \mathrm{d}\tau, \quad y_{m,n} = \int \psi_m^* y \psi_n \, \mathrm{d}\tau, \; z_{m,n} = \int \psi_m^* z \psi_n \, \mathrm{d}\tau$$

als Matrixelemente des betreffenden Übergangs bezeichnet. Aus diesen Elementen lassen sich die Auswahlregeln für die Quantenübergänge sowie für die Intensitäts- und Polarisationsverhältnisse der Strahlung berechnen. Wenn wir $A_{m,n}$ mit der Energie $h\nu_{m,n}$ und mit der Zahl der angeregten Atome multiplizieren, die aus statistischen Überlegungen folgt, so können wir daraus die mittlere Strahlungsleistung bestimmen.
Die Formeln zur Berechnung der Matrixelemente $L_{m,n}$ aus den Eigenfunktionen ψ_m, ψ_n der Eigenwertgleichung

$$L\psi = L\psi$$

stellen die Verbindung zwischen der von HEISENBERG auf die Matrizenrechnung gegründeten Quantenmechanik und der von SCHRÖDINGER entworfenen Wellenmechanik her. Beide Darstellungsweisen, die wellenmechanische und die matrizenmechanische, werden in der Quantentheorie parallel angewandt.

B Beispiele

232. Berechnen Sie die Quantenzustände für einen linearen harmonischen Oszillator nach der SCHRÖDINGER-Gleichung. Für die Oszillationen eines O_2-Moleküls mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = 2{,}95 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$ sind die möglichen Energiewerte zu bestimmen.

Lösung

Wir setzen stationäre Zustände voraus. Es soll lediglich eine räumliche Abhängigkeit von der reduzierten Variablen x bestehen. Wir bezeichnen die reduzierte Masse mit

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

und die Kreisfrequenz der Eigenschwingung mit ω_0. Daraus folgt für die potentielle Energie des Oszillators ganz analog der klassischen Theorie

$$E_p = \frac{\mu}{2}\,\omega_0 x^2. \tag{2}$$

Die SCHRÖDINGER-Gleichung lautet

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - E_p)\,\frac{2\mu}{\hbar}\,\psi = 0. \tag{3}$$

Unter Verwendung der Ausdrücke

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}}, \quad \xi = \frac{x}{x_0} \tag{4}$$

können wir Gl. (3) umformen in

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega_0} - \xi^2\right)\psi = 0. \tag{5}$$

Diese Differentialgleichung wird durch den Ansatz

$$\psi = \psi_n(\xi) = C_n H_n(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{6}$$

gelöst, wobei wir für das HERMITEsche Polynom H_n schreiben:

$$H_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (2\xi)^\nu. \tag{7}$$

Wir bilden die zweite Ableitung

$$\frac{d^2 H_n}{d\xi^2} = \sum_{\nu=2} 4\nu(\nu - 1)\, a_\nu (2\xi)^{\nu-2} \tag{8}$$

und setzen diese in Gl. (5) ein. Es folgt die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} (2\xi)_\nu \left[4(\nu + 2)(\nu + 1)\, a_{\nu+2} - 2\nu a_\nu + \left(\frac{2E}{\hbar\omega_0} - 1\right) a_\nu\right] = 0. \tag{9}$$

Damit diese Bedingung erfüllt ist, müssen sämtliche Koeffizienten verschwinden, das bedeutet

$$a_{\nu+2} = \frac{2\nu - \left(\frac{2E}{\hbar\omega_0} - 1\right)}{4(\nu+2)(\nu+1)} a_\nu . \tag{10}$$

Wenn diese Reihe für $\nu = n$ abbrechen soll, dann muß

$$a_{n+2} = a_{n+4} = \cdots = 0$$

sein. Das aber ist nur möglich für

$$2n + 1 - \frac{2E}{\hbar\omega_0} = 0,$$

woraus folgt

$$E = E_n = \frac{\hbar\omega_0}{2}(2n+1) = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right); \quad n = 0, 1, 3, \ldots \tag{11}$$

Hiernach tritt die Energie des harmonischen Oszillators gequantelt auf, wobei die Nullpunktenergie den Wert $\hbar\omega_0/2$ hat.
Wir legen $a_n = 1$ fest und setzen Gl. (11) in Gl. (10) ein. Dann ergibt sich

$$H_n(\xi) = (2\xi)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2\xi)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2\xi)^{n-4} \pm \cdots$$

Dieser Ausdruck kann zusammengefaßt werden zu

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} . \tag{12}$$

Als Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung erhalten wir damit

$$\psi_n = C_n H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} = C_n (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} . \tag{13}$$

Aus Beispiel 205 entnehmen wir, daß die Normierungskonstante den Wert

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt[4]{\frac{\mu\omega_0}{\pi\hbar}} \tag{14}$$

hat. Wir berechnen abschließend die Energiewerte E_n entsprechend Gl. (11).
Setzen wir die gegebenen Größen ein, so ergibt sich

$$E = E_n = 1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}95 \cdot 10^{14} \left(n + \frac{1}{2}\right) \text{J} = 3{,}09 \cdot 10^{-20} \left(n + \frac{1}{2}\right) \text{J} =$$

$$= 3{,}09 \cdot 10^{-20} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{18} \left(n + \frac{1}{2}\right) \text{eV} = 0{,}193 \left(n + \frac{1}{2}\right) \text{eV}.$$

Hiernach hat das Quant des Oszillators den Wert

$$\hbar\omega_0 = 3{,}09 \cdot 10^{-20}\ \text{J} = \underline{0{,}193\ \text{eV}.}$$

Für die Nullpunktenergie erhalten wir 0,096 eV, für die Energie der ersten Grundschwingung dagegen 0,289 eV.

233. Berechnen Sie die Wellenlänge der von einem Sauerstoffmolekül infolge seiner Oszillation emittierten Strahlung. Als zulässige Änderung der Quantenzahl ist $\Delta n = 1$ zu setzen. $\omega_0 = 2{,}95 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$

Lösung

Nach dem BOHRschen Postulat gilt für die Frequenz der Strahlung

$$h\nu = E_a - E_e = \hbar\omega_0 \Delta n = \hbar\omega_0 .$$

Wie wir sehen, ist die Frequenz ν gleich der Oszillationsfrequenz $\omega_0/2\pi$, mit der die beiden Sauerstoffatome gegeneinander schwingen. Hieraus ergibt sich

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^8}{2{,}95 \cdot 10^{14}}\ \mathrm{m} = \underline{6{,}36\ \mu\mathrm{m}.}$$

Die Strahlung liegt also im infraroten Spektralbereich.

234. Nach der klassischen Theorie und nach der Quantentheorie ist die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, beim harmonischen Oszillator für die Auslenkung einen Wert zwischen den Grenzen x und $x + \mathrm{d}x$ anzutreffen. Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit bei einem Wasserstoffmolekül, das sich in der ersten Grundschwingung mit $\omega_0 = 8{,}04 \times \times 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$ befindet, für die Werte $x = 20 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}$, $\mathrm{d}x = 5 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}$?

Lösung

Als Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung für den harmonischen Oszillator hatten wir bereits erhalten

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt[4]{\frac{\mu\omega_0}{\pi\hbar}}\, H_n(\xi)\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt[4]{\frac{\mu\omega_0}{\pi\hbar}}\, \mathrm{e}^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n\, \mathrm{e}^{-\xi^2}}{\mathrm{d}\xi^n}$$

mit

$$\xi = \frac{x}{x_0}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} .$$

Im Fall $n = 1$ folgt

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{x_0\sqrt{\pi}}}\, \frac{x}{x_0}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} .$$

Hieraus ergibt sich

$$w(x) = |\psi(x)|^2 = \frac{2}{x_0\sqrt{\pi}} \frac{x^2}{x_0^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{x_0^2}} .$$

Für die zu untersuchende Oszillation des Wasserstoffmoleküls erhalten wir

$$\mu = \frac{m_\mathrm{H} m_\mathrm{H}}{2m_\mathrm{H}} = \frac{m_\mathrm{H}}{2} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}}{2}\ \mathrm{kg} = 0{,}84 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg},$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}} = \sqrt{\frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{0{,}84 \cdot 10^{-27} \cdot 8{,}04 \cdot 10^{14}}}\ \mathrm{m} = 12{,}5 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}.$$

Somit folgt

$$\frac{x}{x_0} = \frac{20 \cdot 10^{-12}}{12{,}5 \cdot 10^{-12}} = 1{,}6, \quad \frac{x^2}{x_0^2} = 2{,}56$$

und daraus

$$w(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x^2}{x_0^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{x_0^2}} \frac{\mathrm{d}x}{x_0} = \frac{2}{1{,}77} \cdot 2{,}56 \cdot 0{,}077 \, \frac{5 \cdot 10^{-12}}{12{,}5 \cdot 10^{-12}} = \underline{0{,}089}.$$

Bei der klassischen Rechnung ist die Auslenkung durch

$$x = a \sin \omega_0 t$$

bestimmt, wobei sich die Amplitude a gemäß der Beziehung

$$a = \sqrt{\frac{2E}{\mu\omega_0^2}}$$

aus der Energie E ergibt.
Wir bezeichnen die Periodendauer mit $T = 2\pi/\omega_0$, die Zeitspanne für das Durchlaufen der Strecke $\mathrm{d}x$ mit $\mathrm{d}t$. Da das Teilchen sich sowohl beim Hin- als auch beim Rücklauf im Bereich $x \cdots x + \mathrm{d}x$ befindet, erhalten wir für die klassische Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{d}W_{\text{klass}} = w_{\text{klass}}(x)\,\mathrm{d}x = 2\,\frac{\mathrm{d}t}{T}.$$

Somit folgt wegen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\,\omega_0 \cos \omega_0 t,$$

$$\mathrm{d}W_{\text{klass}} = w_{\text{klass}}\,\mathrm{d}x = 2\,\frac{\omega_0}{2\pi}\,\frac{\mathrm{d}x}{a\,\omega_0 \cos \omega_0 t} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

also ist

$$w_{\text{klass}}(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Im vorliegenden Fall ist das Oszillationsquant der Schwingung

$$E = \hbar\omega_0 = 1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 8{,}04 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} = 8{,}44 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{J}.$$

Es folgt weiter

$$a = \sqrt{\frac{2E}{\mu\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34}}{0{,}84 \cdot 10^{-27} \cdot 2{,}95 \cdot 10^{14}}}\ \mathrm{m} = 29{,}1 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}.$$

Hieraus ergibt sich für die klassische Wahrscheinlichkeit

$$w_{\text{klass}}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{5 \cdot 10^{-12}}{3{,}14 \cdot 10^{-12}\sqrt{(29{,}1)^2 - (20)^2}} = \underline{0{,}075}.$$

Also ergibt sich gegenüber der quantenmechanischen Rechnung ein beträchtlicher Unterschied.

In Bild 131 wurde die Wahrscheinlichkeitsdichte entsprechend klassischer und quantentheoretischer Berechnung aufgetragen. In Übereinstimmung mit dem quantenmechanischen Tunneleffekt können auch Auslenkungen der Größe $|x| > a$ auftreten, die gemäß klassischer Betrachtung nicht möglich sind.

235. Gemäß der HEISENBERGschen Unschärferelation gilt zwischen der Ungenauigkeit des Ortes und der Ungenauigkeit des Impulses die Beziehung

$$\overline{(\Delta x)^2}\,\overline{(\Delta p_x)^2} \geqq \frac{\hbar^2}{4}. \tag{1}$$

Berechnen Sie nach Maßgabe dieses Zusammenhangs das Energieminimum des harmonischen Oszillators.

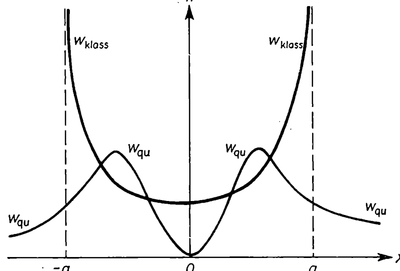


Bild 131

Lösung

Die Gesamtenergie beträgt im Mittel

$$\overline{E} = \frac{\overline{p_x^2}}{2\mu} + \frac{\mu\omega_0^2}{2}\,\overline{x^2}. \tag{2}$$

Für den Mittelwert der Ortskoordinate erhalten wir

$$\bar{x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \, x \psi_n \, \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 \, x \, \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Da $|\psi_n|^2$ eine gerade Funktion ist, ergibt sich für $x|\psi_n|^2$ eine ungerade Funktion, also verschwindet das Integral (3), und es wird $\bar{x} = 0$.
Weiter erhalten wir mit $\psi_n^* = \psi_n$ für die Impulskoordinate den Ausdruck

$$\bar{p}_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n \left(-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_n \, \mathrm{d}x = -\mathrm{i}\hbar \left[\psi_n^2\right]_{-\infty}^{+\infty}.$$

Dieser ergibt gleichfalls den Wert Null, denn ψ_n verschwindet im Unendlichen. Somit können wir schreiben

$$x^2 = \Delta x^2, \quad p_x^2 = \Delta p_x^2,$$

und an Stelle von Gl. (1) erhalten wir

$$\overline{x^2}\,\overline{p_x^2} \geqq \frac{\hbar^2}{4} \tag{4}$$

oder

$$\overline{x^2} \geqq \frac{\hbar^2}{4\overline{p_x^2}}. \tag{5}$$

Wenn wir Gl. (5) in Gl. (2) einsetzen, so folgt für die Energie

$$\overline{E} = \frac{\overline{p_x^2}}{2\mu} + \mu \frac{\omega_0^2 \overline{x^2}}{2} \geqq \frac{\overline{p_x^2}}{2\mu} + \frac{\mu \omega_0^2 \hbar^2}{2 \cdot 4 \overline{p_x^2}}. \tag{6}$$

Das Minimum erhalten wir durch Null-Setzen der ersten Ableitung, wobei $\overline{p_x^2}$ als unabhängige Variable aufgefaßt werden kann. Für den Extremwert erhalten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{2\mu} - \frac{\mu}{8} \frac{\omega_0^2 \hbar^2}{(\overline{p_x^2})^2} = 0, \quad \overline{p_x^2} = \frac{\mu \omega_0 \hbar}{2}. \tag{7}$$

Wir setzen den so gefundenen Ausdruck Gl. (7) in Gl. (6) ein, und es folgt

$$\overline{E} \geqq \frac{\hbar\omega_0}{4} + \frac{\hbar\omega_0}{4} = \underline{\frac{\hbar\omega_0}{2}}.$$

Demnach ist die Nullpunktenergie $\hbar\omega_0/2$ die kleinste Energie des harmonischen Oszillators, die mit der HEISENBERGschen Unschärferelation verträglich ist.

236. Berechnen Sie die H-Matrix des harmonischen Oszillators.

Lösung

Die Elemente $H_{m,n}$ der H-Matrix ergeben sich aus

$$H_{m,n} = \int \psi_m^*(x) H \psi_n(x) \, dx.$$

Entsprechend der SCHRÖDINGER-Gleichung für stationäre Zustände gilt

$$H\psi_n = E_n \psi_n.$$

Demnach können wir, da die Lösungsfunktionen ψ_n, ψ_n^* normiert und orthogonal sind, schreiben

$$H_{m,n} = \int \psi_m^* E_n \psi_n \, dx = E_n \int \psi_m^* \psi_n \, dx = E_n \delta_{m,n} = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) \delta_{m,n};$$

dabei bedeutet $\delta_{m,n}$ das KRONECKER-Symbol. Wir erhalten die Matrix

$$H = \begin{Vmatrix} \frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 3\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 5\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \end{Vmatrix}$$

237. Berechnen Sie die Matrix der Ortskoordinaten für den harmonischen Oszillator. Wie groß ist die Übergangsfrequenz für Sprünge vom Zustand $m = 2$ in den Zustand $n = 1$ bei einem Wasserstoffmolekül mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = 8{,}04 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$? Die reduzierte Masse hat den Wert $\mu = 0{,}84 \cdot 10^{-27}$ kg.

Lösung

Die mittlere Zahl der pro Sekunde stattfindenden Übergänge aus dem Zustand m in den Zustand n beträgt

$$N_{m,n} = \frac{e^2}{3\pi\varepsilon_0 \hbar^4 c^3} |E_m - E_n|^3 \left(\int x\psi_m\psi_n \, dx \right)^2 . \tag{1}$$

Wir berechnen die Matrixelemente

$$x_{m,n} = \int x\psi_m\psi_n \, dx = x_0^2 \int \xi\psi_m(\xi)\psi_n(\xi) \, d\xi =$$

$$= C_m C_n x_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-\xi^2} H_m(\xi) H_n(\xi) \, d\xi . \tag{2}$$

Für den Fall $m = n$ erhalten wir im Integranden wegen des Faktors ξ eine ungerade Funktion. Da sich die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt, folgt somit

$$x_{m,m} = 0 .$$

In den weiteren Überlegungen setzen wir $m > n$ voraus.
Die Funktion $\xi H_n(\xi)$ wird in eine Reihe der Funktionen $H_i(\xi)$ entwickelt, wobei für i gilt: $i = 0, 1, 2, \cdots, n + 1$, also

$$\xi H_n(\xi) = \xi(2\xi)^n \pm \cdots = \sum_{i=0}^{n+1} c_i H_i(\xi) = c_{n+1}(2\xi)^{n+1} + \cdots . \tag{3}$$

Hieraus folgt

$$c_{n+1} = \frac{1}{2} .$$

Indem wir Gl. (3) in Gl. (2) einsetzen, erhalten wir

$$x_{m,n} = C_m C_n x_0^2 \sum_{i=0}^{n+1} c_i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_m(\xi) H_i(\xi) \, d\xi . \tag{4}$$

Wegen der vorausgesetzten Orthogonalität der Lösungsfunktion verschwindet jedes Glied für $i \neq m$. Da i alle ganzzahligen Werte von 0 bis $n + 1$ durchläuft, kann in Gl. (4) nur für den Fall $n + 1 = m$ ein von Null verschiedener Summand auftreten. In allen anderen Fällen $m > n$ folgt $x_{m,n} = 0$. Haben wir dagegen $m = n + 1$, so ergibt sich aus Gl. (4)

$$x_{n+1,n} = C_{n+1} C_n x_0^2 c_{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_{n+1}^2(\xi) \, d\xi =$$

$$= \frac{C_n}{C_{n+1}} x_0 \frac{1}{2} C_{n+1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{x_0^2}} H_{n+1}^2(x) \, dx = \frac{x_0}{2} \frac{C_n}{C_{n+1}} = \frac{x_0}{2} \frac{\sqrt{2^{n+1}(n+1)!}}{\sqrt{2^n n!}}$$

wegen der geltenden Normierungsbedingung.

Damit folgt

$$x_{n+1,\,n} = \frac{x_0\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{(n+1)\hbar}{2\mu\omega_0}}\,. \tag{5}$$

Ebenso erhalten wir

$$x_{m,m+1} = \frac{x_0\sqrt{m+1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{(m+1)\hbar}{2\mu\omega_0}}\,. \tag{6}$$

Demzufolge muß die Ortsmatrix des harmonischen Oszillators das folgende Aussehen annehmen:

$$x = x_0 \begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix} \tag{7}$$

Dabei wurde die Numerierung der Zeilen und Spalten mit Null begonnen. Im harmonischen Oszillator sind demnach nur solche Übergänge möglich, bei denen sich die Quantenzahl um

$$\Delta n = \pm 1$$

ändert.

Für den Übergang vom Zustand $m = 2$ auf den Zustand $n = 1$ folgt gemäß Gl. (5) bzw. Gl. (7)

$$x_{2,1} = x_0\sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}}\,.$$

Die Anzahl der in der Sekunde erfolgenden Übergänge des Oszillators erhalten wir danach zu

$$N_{2,1} = \frac{e^2}{3\pi\varepsilon_0\hbar^4c^3}(E_{n+1} - E_n)^3\, x_{2,1}^2 = \frac{e^2\omega_0^2}{3\pi\varepsilon_0c^3\mu} =$$

$$= \frac{(1{,}6\ 10^{-19})^2\cdot(8{,}04\cdot10^{14})^2}{3\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot(3\cdot10^8)^3\cdot0{,}84\cdot10^{-27}}\,\mathrm{s}^{-1} = \underline{8{,}73\cdot10^3\,\mathrm{s}^{-1}}.$$

Wenn auf Grund statistischer Untersuchungen die Besetzungszahlen für die einzelnen Quantenzustände bekannt sind, kann mit dem vorstehend angewandten Verfahren die Intensität der einzelnen Spektrallinien errechnet werden.

238. In einem zweiatomigen Molekül sei der Abstand beider Atome unveränderlich, so daß nur Rotationsbewegungen auftreten können (starrer Rotator). Leiten Sie aus der allgemeinen Gleichung $H\psi = E\psi$ die SCHRÖDINGER-Gleichung in Kugelkoordinaten für den starren Rotator ab, und bestimmen Sie aus dem Vergleich mit der Eigenwertgleichung $L^2\psi = L^2\psi$ die Energiestufen. Wie groß ist das Rotationsquant für das Wasserstoffmolekül? Der Abstand der beiden Wasserstoffatome ist $r = 0{,}75\cdot10^{-10}$ m.

Lösung

Wegen des unveränderlichen Abstands beider Atome ist die potentielle Energie des Moleküls eine konstante Größe; wir können sie gleich Null setzen. Im HAMILTON-Operator

$$H = T_r(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \tag{1}$$

ist ebenfalls T_r gleich Null zu setzen, da sich nur die Winkelvariablen ϑ und φ ändern. Nach einer Multiplikation mit dem konstanten Faktor $2\mu r^2$ ergibt sich danach

$$L^2\psi = 2\mu r^2 E\psi \tag{2}$$

bzw.

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2}E\psi = 0 \tag{3}$$

als SCHRÖDINGER-Gleichung des starren Rotators.
Aus der Einleitung zu 4.3. ist uns bekannt, daß die Differentialgleichung

$$L^2\psi l = L_l^2\psi l \tag{4}$$

nur für die Eigenwerte

$$L_l^2 = \hbar^2 l\ (l+1); \qquad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

physikalisch sinnvolle Lösungen zuläßt.
Vergleichen wir Gl. (2) u. (4), so erkennen wir, daß die Differentialgleichung des starren Rotators mit den Eigenwerten

$$2\mu r^2 E = \hbar^2 l\ (l+1); \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

lösbar ist. Die Energie E des Rotators tritt also gequantelt auf, und zwar ist

$$E = E_l = \frac{\hbar^2 l\,(l+1)}{2\mu r^2} = \frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{8\mu r^2}\,. \tag{6}$$

Wenn wir die Energiedifferenz $E_1 - E_0$ als Rotationsquant definieren, so folgt

$$E_1 - E_0 = \frac{\hbar^2}{\mu r^2} = \frac{(1{,}05 \cdot 10^{-34})^2}{0{,}84 \cdot 10^{-27}\,(0{,}75 \cdot 10^{-10})^2}\ \mathrm{J} = \underline{2{,}32 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}}.$$

Das Rotationsquant erweist sich also um etwa eine Größenordnung kleiner als das Oszillationsquant.

239. Für den Abstand zweier Rotationslinien des Sauerstoffmoleküls wurde als Mittelwert

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 291\ \mathrm{m}^{-1}$$

gemessen. Berechnen Sie daraus den mittleren Kernabstand und das Massenträgheitsmoment des Sauerstoffmoleküls.

Lösung

Gemäß dem BOHRschen Postulat ergibt sich die Wellenlänge der Strahlung aus

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{E_{l+1} - E_l}{hc}. \tag{1}$$

Hierbei ist berücksichtigt, daß Übergänge im starren Rotator entsprechend der Auswahlregel

$$\Delta l = \pm 1$$

erfolgen.
Setzen wir aus dem vorhergehenden Beispiel 238 die Gl. (6) hier in Gl. (1) ein, so erhalten wir den Übergang vom Quantenzustand $l + 1$ in den Zustand l gemäß

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{l,l+1} = \frac{h}{8\pi^2 c\mu r^2} 2(l+1) = 2B\,(l+1). \tag{2}$$

Es folgt also als Differenz der Wellenzahlen benachbarter Rotationslinien

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{l,l+1} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{l,l-1} = \frac{h}{4\pi^2 c\mu r^2} = 2B. \tag{3}$$

Demnach ist der Frequenzabstand benachbarter Rotationslinien konstant.
Für das Massenträgheitsmoment des Sauerstoffmoleküls erhalten wir den Wert

$$J = \mu r^2 = \frac{h}{4\pi^2 c\,\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 291}\,\text{kgm}^2 = \underline{1{,}92 \cdot 10^{-46}\,\text{kgm}^2}.$$

Die reduzierte Masse des Sauerstoffmoleküls ist $\mu = 8 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} = 13{,}4 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$.
Daraus finden wir den Kernabstand zu

$$r = \sqrt{\frac{J}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}92 \cdot 10^{-46}}{13{,}4 \cdot 10^{-27}}}\,\text{m} = \underline{1{,}19 \cdot 10^{-10}\,\text{m}}.$$

240. Es wird die Rotationsschwingungsbande des CO-Moleküls (Bild 132) untersucht. Für die erste Linie des P-Zweiges werde die Wellenzahl

$$\tilde{\nu}_{-1} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{-1} = 2{,}1654 \cdot 10^5\,\text{m}^{-1},$$

für die erste Linie des R-Zweiges die Wellenzahl

$$\tilde{\nu}_{+1} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{+1} = 2{,}1730 \cdot 10^5\,\text{m}^{-1}$$

gemessen. Berechnen Sie aus diesen Angaben das Schwingungsquant $\hbar\omega_0$, die Oszillationsfrequenz und das Trägheitsmoment des CO-Moleküls. Wie groß ist der Kernabstand?

P-Zweig
-4 -3 -2 -1
R-Zweig
1 2 3 4
Absorption in %
100 80 60 40 20
215000 216000 217000 218000
$\tilde{\nu}$/m

Bild 132

Lösung

Rotationsschwingungsbanden treten auf, wenn das Molekül sowohl Oszillations- als auch Rotationsschwingungen ausführt. In diesem Fall erhalten wir die Gesamtenergie E als die Summe von Rotations- und Oszillationsenergie [vgl. Gl. (6) in Beispiel 238 sowie Gl. (11) in Beispiel 232]:

$$E_{n,l} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{l(l+1)\,\hbar^2}{2\mu r^2}\,. \tag{1}$$

Für die Wellenzahl der Strahlung ergibt sich nach dem BOHRschen Postulat

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{E_{n',l'} - E_{n,l}}{hc}\,, \tag{2}$$

wobei die Übergangsregeln

$$\Delta n = n' - n = \pm 1\,, \quad l = l' - l = \pm 1 \tag{3}$$

zu berücksichtigen sind.
Eine Emission erfolgt für den Fall $\Delta n = +1$, und – da das Rotationsquant etwa eine Größenordnung kleiner als das Oszillationsquant ist – für $\Delta l = \pm 1$. Aus Gln. (1) u. (2) erhalten wir somit

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc}\left[\hbar\omega_0 + \frac{\hbar^2}{2\mu r^2}(2l + 1 \pm 1)\right]. \tag{4}$$

Für die Oszillationsquantenzahl l haben wir ganzzahlige Werte

$$l = 0, 1, 2, \ldots$$

einzusetzen. Wenn wir in Gl. (4) das obenstehende positive Vorzeichen annehmen, so finden wir für die Wellenzahlen des R-Zweiges

$$\bar{\nu}_+ = \frac{\omega_0}{2\pi c} + \frac{h}{4\pi^2 c\mu r^2}(l+1) = \frac{\omega_0}{2\pi c} + 2(l+1)\,B. \tag{5}$$

Bei Wahl des negativen Vorzeichens in Gl. (4) erhalten wir für die Wellenzahlen des P-Zweiges

$$\bar{\nu}_- = \frac{\omega_0}{2\pi c} - \frac{h}{4\pi^2 c\mu r^2}\,l = \frac{\omega_0}{2\pi c} - 2lB. \tag{6}$$

Dabei berücksichtigen wir, daß für die Rotationsquantenzahl $l = 0$ ein Übergang in Rotationsbewegungen mit negativer Quantenzahl $l - 1 = -1$ nicht möglich ist. Der Wert $l = 0$ tritt daher in Gl. (6) nicht auf, vielmehr haben wir zu schreiben

$$l = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wir ersehen hieraus, daß die erste Linie des R-Zweiges die Wellenzahl

$$\bar{\nu}_{+1} = \frac{\omega_0}{2\pi c} + 2B,$$

die erste Linie des P-Zweiges die Wellenzahl

$$\bar{\nu}_{-1} = \frac{\omega_0}{2\pi c} - 2B$$

aufweist. Eine Linie mit der Wellenzahl

$$\bar{\nu}_0 = \frac{\omega_0}{2\pi c}$$

tritt dagegen nicht auf.

Aus der Messung der Linien $\bar{\nu}_{+1}$ und $\bar{\nu}_{-1}$ finden wir die Wellenzahl der fehlenden Linie zu

$$\bar{\nu}_0 = \frac{\nu_{+1} + \nu_{-1}}{2} = \frac{2{,}1730 + 2{,}1654}{2}\, 10^5\ \text{m}^{-1} = 2{,}1692 \cdot 10^5\ \text{m}^{-1}.$$

Hieraus erhalten wir für die Oszillationsfrequenz

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = c\bar{\nu}_0 = 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}1692 \cdot 10^5\ \text{s}^{-1} = \underline{6{,}5076 \cdot 10^{13}\ \text{s}^{-1}}.$$

Das Oszillationsquant beträgt

$$\hbar\omega_0 = hc\bar{\nu}_0 = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 6{,}51 \cdot 10^{13}\ \text{J} = \underline{4{,}31 \cdot 10^{-20}\ \text{J}}.$$

Aus dem Abstand beider Linien entnehmen wir

$$\bar{\nu}_{+1} - \bar{\nu}_{-1} = 4B = \frac{h}{2\pi^2 c\mu r^2} = (2{,}1730 - 2{,}1654) \cdot 10^5\ \text{m}^{-1} = 760\ \text{m}^{-1}$$

und daraus für das Trägheitsmoment des CO-Moleküls den Wert

$$J = \mu r^2 = \frac{h}{2\pi^2 c(\bar{\nu}_{+1} - \bar{\nu}_{-1})} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{2\,(3{,}14)^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 760}\ \text{kgm}^2 =$$

$$= \underline{1{,}47 \cdot 10^{-46}\ \text{kgm}^2}.$$

Die reduzierte Masse des CO-Moleküls beträgt

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{12 \cdot 16}{12 + 16} \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} = 1{,}147 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}.$$

Für den Kernabstand finden wir also

$$r = \sqrt{\frac{J}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}47 \cdot 10^{-46}}{1{,}147 \cdot 10^{-26}}}\ \text{m} = \underline{1{,}13 \cdot 10^{-10}\ \text{m}}.$$

241. Von einer Quecksilberdampflampe wird eine Linie der Wellenlänge $\lambda = 2536 \cdot 10^{-10}$ m emittiert. Berechnen Sie die SMEKAL-RAMAN-Streuung in einer H_2-Atmosphäre, wenn der Kernabstand der beiden Wasserstoffatome $r = 0{,}77 \cdot 10^{-10}$ m und die Masse eines Wasserstoffatoms $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg beträgt.

Lösung

Die Einstrahlung des Quecksilberlichts bedeutet für das getroffene Molekül, daß seine Energie auf ein Zwischenniveau angehoben wird. Dabei kann die Rotationsquantenzahl um ± 1 verändert werden. Bei der Wiederausstrahlung kann ebenfalls eine Änderung um ± 1 eintreten. Für den SMEKAL-RAMAN-Effekt ergeben sich damit die folgenden Auswahlregeln:

$$\Delta l = -1 - 1 = -2 \quad (P\text{-Zweig}),$$

$$\Delta l = -1 + 1 = 0 \quad (Q\text{-Zweig}),$$

$$\Delta l = +1 + 1 = +2 \quad (R\text{-Zweig}).$$

Aus dem Energieniveau für die Rotationsschwingungszustände

$$E_{n,l} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{l\,(l+1)\,\hbar^2}{2\mu r^2}$$

erhalten wir demnach die Wellenzahlen:
1. $\Delta l = -2$ (P-Zweig):

$$\bar{\nu}_- = \frac{E_{n+1,l-2} - E_{n,l}}{hc} = \frac{\omega_0}{2\pi c} - 2(2l-1)\frac{h}{8\pi^2 c\mu r^2} = \frac{\omega_0}{2\pi c} - 2(2l-1)B;$$

$l = 2, 3, 4, \ldots;$

2. $\Delta l = 0$ (Q-Zweig):

$$\bar{\nu}_0 = \frac{E_{n+1,l} - E_{n,l}}{hc} = \frac{\omega_0}{2\pi c};$$

3. $\Delta l = +2$ (R-Zweig):

$$\bar{\nu}_+ = \frac{E_{n+1,l+2} - E_{n,l}}{hc} = \frac{\omega_0}{2\pi c} + 2(2l+3)\frac{h}{8\pi^2 c\mu r^2} = \frac{\omega_0}{2\pi c} + 2(2l+3)B;$$

$l = 0, 1, 2, \ldots.$

Bei der numerischen Rechnung müssen wir die reduzierte Masse des Wasserstoffmoleküls, nämlich

$$\mu = \frac{m}{2} = 0{,}836 \cdot 10^{-27}\,\text{kg},$$

einsetzen. Wir erhalten damit zunächst

$$B = \frac{h}{8\pi^2 c\mu r^2} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{8 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 0{,}836 \cdot 10^{-27} \cdot (0{,}77 \cdot 10^{-10})^2}\,\text{m}^{-1} =$$

$$= 5644\,\text{m}^{-1}.$$

Ferner ist

$$\frac{\omega_0}{2\pi c} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2536 \cdot 10^{-10}}\,\text{m}^{-1} = 3{,}9432 \cdot 10^6\,\text{m}^{-1}.$$

Für die Wellenzahlen $\bar{\nu}$ und die Wellenlängen λ der gestreuten Strahlung ergeben sich somit die in folgender Tabelle dargestellten Werte (s. auch Bild 133):

		P-Zweig			*Q*-Zweig	*R*-Zweig		
	l	4	3	2		0	1	2
	Zusatzglied	$-14\,B$	$-10\,B$	$-6\,B$		$6\,B$	$10\,B$	$14\,B$
λ	10^{-10} m	2588,0	2572,8	2558,0	2536,0	2514,4	2500,2	2486,2
$\bar{\nu}$	10^{6} m^{-1}	3,8642	3,8868	3,9093	3,9432	3,9771	3,9996	4,0222

242. Die Auswertung eines Fortrat-Diagramms für das AlH-Spektrum ergibt einen Bandenkopf des *R*-Zweiges für die Quantenzahl $l = 4{,}1$, einen Bandenkopf des *P*-Zweiges für die Quantenzahl $l = -5{,}1$. Als Differenz $\Delta = (\bar{\nu}_{\text{rot}R} - \bar{\nu}_{\text{rot}Q}) - (\bar{\nu}_{\text{rot}Q} - \bar{\nu}_{\text{rot}P})$ wird unabhängig von der Quantenzahl l ein Wert $\Delta = 920\,\text{m}^{-1}$ ermittelt. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des AlH-Moleküls vor und nach dem Quantensprung (Bild 134).

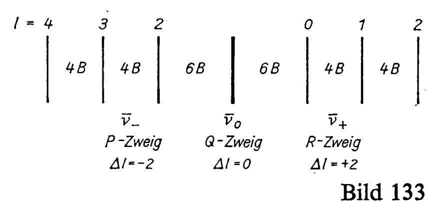


Bild 133

Bild 134

Lösung

Die Änderung der Elektronenanordnung im Molekül ist mit einer Änderung seines Trägheitsmoments verbunden. Wir bezeichnen mit J das Trägheitsmoment vor, mit J' das Trägheitsmoment nach Veränderung des Quantenzustands. Demzufolge erhalten

wir für die Rotationsenergie vor und nach dem Quantensprung die Ausdrücke

$$E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2J}, \quad E'_{l'} = \frac{l'(l'+1)\hbar^2}{2J'}.$$

Die Änderung des Rotationszustands bewirkt eine zusätzliche Strahlungskomponente. Für die Wellenzahl dieser zusätzlichen Komponente erhalten wir

$$\bar{\nu}_{\text{rot}} = \frac{E'_{l'} - E_l}{hc} = \frac{h}{8\pi^2 c}\left[\frac{l'(l'+1)}{J'} - \frac{l(l+1)}{J}\right] \tag{1}$$

mit den Auswahlregeln

$$\Delta l = l' - l = 0, \pm 1.$$

Wir setzen

$$\bar{B} = \frac{h}{8\pi^2 c}\left(\frac{1}{J'} + \frac{1}{J}\right), \quad \bar{C} = \frac{h}{8\pi^2 c}\left(\frac{1}{J'} - \frac{1}{J}\right) \tag{2}$$

und erhalten für $\Delta l = +1$ (R-Zweig)

$$\bar{\nu}_{\text{rot}R} = \bar{B}(l+1) + \bar{C}(l+1)^2, \tag{3}$$

für $\Delta l = 0$ (Q-Zweig)

$$\bar{\nu}_{\text{rot}Q} = \bar{C}(l + l^2) \tag{4}$$

und für $\Delta l = -1$ (P-Zweig)

$$\bar{\nu}_{\text{rot}P} = -\bar{B}l + \bar{C}l^2. \tag{5}$$

Die Zusammendrängung der Spektrallinien erfolgt am Parabelscheitel des betreffenden Zweiges. Wir erhalten den Scheitelwert des R-Zweiges aus der Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\nu}_{\text{rot}R}}{\mathrm{d}l} = \bar{B} + 2\bar{C}(l+1) = 0, \tag{6}$$

woraus folgt

$$l = -\frac{\bar{B}}{2\bar{C}} - 1. \tag{6.1}$$

Für den Q-Zweig ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\nu}_{\text{rot}Q}}{\mathrm{d}l} = \bar{C}(1 + 2l) = 0 \tag{7}$$

und daraus

$$l = -\frac{1}{2}. \tag{7.1}$$

Für den P-Zweig schließlich gilt

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\nu}_{\text{rot}P}}{\mathrm{d}l} = -\bar{B} + 2\bar{C}l = 0, \tag{8}$$

d. h.

$$l = \frac{\bar{B}}{2\bar{C}} \,. \tag{8.1}$$

Aus den Häufungsstellen des P-Zweiges und des R-Zweiges entnehmen wir

$$-5{,}1 = \frac{\bar{B}}{2\bar{C}}, \quad 4{,}1 = -\frac{\bar{B}}{2\bar{C}} - 1 \,. \tag{9}$$

Die Ergebnisse der Messung für den P-Zweig und für den R-Zweig zeigen also Übereinstimmung miteinander.
Für die Differenz Δ erhalten wir aus den Gln. (3), (4) u. (5)

$$\Delta = (\bar{\nu}_{\text{rot}R} - \bar{\nu}_{\text{rot}Q}) - (\bar{\nu}_{\text{rot}Q} - \bar{\nu}_{\text{rot}P}) = \bar{B} + \bar{C} \tag{10}$$

und somit durch Auswertung der Messung

$$\bar{B} + \bar{C} = 920\,\text{m}^{-1} \,. \tag{11}$$

Aus den beiden Bestimmungsgln. (9) u. (11) entnehmen wir schließlich die Werte für

$$\bar{B} = 1020\,\text{m}^{-1}, \quad \bar{C} = -100\,\text{m}^{-1} \,. \tag{12}$$

Wir verwenden für die Ermittlung des Trägheitsmoments vor dem Quantensprung die Definitionsgl. (2) und finden

$$J = \frac{h}{4\pi^2 c} \frac{1}{\bar{B} - \bar{C}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 3 \cdot 10^8} \frac{1}{1120}\,\text{kgm}^2 =$$

$$= \frac{5{,}10 \cdot 10^{-44}}{1120}\,\text{kgm}^2 = \underline{4{,}55 \cdot 10^{-47}\,\text{kgm}^2} \,. \tag{13}$$

Als Trägheitsmoment nach Vollzug des Quantensprungs ergibt sich

$$J' = \frac{h}{4\pi^2 c} \frac{1}{\bar{B} + \bar{C}} = \frac{5{,}10 \cdot 10^{-44}}{920}\,\text{kg}\,\text{m}^2 = \underline{5{,}54 \cdot 10^{-47}\,\text{kgm}^2} \,. \tag{14}$$

A Aufgaben

327. Vergleichen Sie das Quant der H_α-Linie mit dem Schwingungs- und mit dem Rotationsquant des HCl-Moleküls. Die Kreisfrequenz der inneren Schwingung ist $\omega_0 = 5{,}21 \cdot 10^{14}\,\text{s}^{-1}$, der Kernabstand $r = 1{,}30 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$, die Wellenlänge der H_α-Strahlung $\lambda_{H\alpha} = 6564 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$; die relative Atommasse des Cl wird mit 35 angesetzt.

328. Berechnen Sie für das HCl-Molekül, welche Wellenlänge der Strahlung des Oszillationsquants und welche der des Rotationsquants entspricht. Kreisfrequenz und Kernabstand wie in Aufg. 327.

329. Berechnen Sie die Formel der Wahrscheinlichkeitsdichte für den harmonischen Oszillator, der sich in der zweiten Grundschwingung befindet. Verglei-

chen Sie das Resultat mit der klassischen Theorie. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Chlormolekül in der zweiten Grundschwingung eine Auslenkung $x = 0$, $dx = 2 \cdot 10^{-12}$ m anzutreffen? Die Kreisfrequenz der inneren Schwingung ist $\omega_0 = 1{,}07 \cdot 10^{14}\,\text{s}^{-1}$.

330. Bestimmen Sie, wieviel Nullstellen die einzelnen Lösungsfunktionen $\psi = \psi_n(x)$ des harmonischen Oszillators haben.
331. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem in der Grundschwingung befindlichen harmonischen Oszillator einen Kernabstand anzutreffen, welcher gemäß der klassischen Theorie nicht zulässig ist?
332. Berechnen Sie $\overline{x^2}$ für den Fall des harmonischen Oszillators, der sich in der ersten Grundschwingung befindet. Welchen Wert erhalten Sie für den Fall des Wasserstoffmoleküls?
333. Berechnen Sie die Impulsmatrix des harmonischen Oszillators.
334. Berechnen Sie die Matrix $px - xp$.
335. Berechnen Sie die Energiematrix

$$E = \frac{1}{2\mu} p^2 + \frac{1}{2} \mu\omega_0^2 x^2 .$$

336. Berechnen Sie für die einzelnen Quantenzustände des harmonischen Oszillators das mittlere Schwankungsquadrat $\overline{\Delta x^2}$ des Ortes und das mittlere Schwankungsquadrat $\overline{\Delta p_x^2}$ des Impulses.
337. Bestimmen Sie die Übergangsfrequenz eines HCl-Moleküls für Übergänge aus dem Zustand $n = 3$ in den Zustand $n = 2$. Die Kreisfrequenz ist $\omega_0 = 5{,}21 \cdot 10^{14}\,\text{s}^{-1}$.
338. Wie groß ist während einer Periodendauer für das HCl-Molekül die Übergangswahrscheinlichkeit $3 \to 2$?
339. Berechnen Sie die Nullpunktenergie eines Oszillators von 10 g Masse in einem Feld der Stärke 1 Nm^{-1}.
340. Die Energie des eindimensionalen Oszillators ist $E = kT$ ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J grd^{-1}, T abs. Temperatur). Berechnen Sie die Quantenzahl des harmonischen Oszillators in Aufg. 339, und zeigen Sie, daß die Energieänderung praktisch stetig erfolgt.
341. Für den Abstand zweier Rotationslinien des NO-Moleküls wird als Mittelwert $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 339\,\text{m}^{-1}$ gemessen. Berechnen Sie daraus das Trägheitsmoment, den Kernabstand und das Rotationsquant des NO-Moleküls.
342. Berechnen Sie den Abstand der Rotationslinien des J_2-Moleküls. Der Kernabstand ist $r = 2{,}66 \cdot 10^{-10}$ m, die relative Atommasse 126. Es stehe ein Spektralapparat der Auflösung $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 10000$ zur Verfügung. In welchem Bereich muß die Trägerstrahlung liegen, damit die Rotationslinien noch getrennt werden können?
343. Es werden die Rotationsschwingungsbande des Br_2-Moleküls untersucht. Wie groß muß das Auflösungsvermögen $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ des Spektralapparats sein, um die Linien voneinander zu trennen? Dabei ist vorauszusetzen, daß nur Rotations- bzw. Oszillationsenergie des Moleküls verändert wird. Die Kreisfrequenz ist $\omega_0 = 6{,}11 \cdot 10^{13}\,\text{s}^{-1}$, das Trägheitsmoment $J = 3{,}42 \cdot 10^{-45}\,\text{kgm}^2$.
344. Berechnen Sie, wie groß das Auflösungsvermögen einer Apparatur sein muß, um den in Beispiel 241 berechneten SMEKAL-RAMAN-Effekt erkennbar werden zu lassen.
345. Berechnen Sie Trägheitsmoment und Kernabstand für ein N_2-Molekül aus den Angaben der SMEKAL-RAMAN-Streuung, wenn das Spektrum im Zentrum durch folgende Wellenzahlen

charakterisiert ist:

$$\bar{\nu} = 3{,}9452 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^{-1},$$
$$3{,}9444 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^{-1},$$
$$3{,}9432 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^{-1},$$
$$3{,}9420 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^{-1},$$
$$3{,}9412 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^{-1}.$$

346. Aus den Lösungen $\psi_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ der SCHRÖDINGER-Gleichung für den starren Rotator sind die zirkularen Matrixelemente

$$(\xi + i\eta)_{l,m;l',m'} =$$
$$= r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi} \times$$
$$\times\ \psi^*_{l,m} \psi_{l',m'} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

und die linearen Matrixelemente

$$(\zeta)_{l,m;l',m'} = r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos\vartheta \times$$
$$\times\ \psi^*_{l,m,} \psi_{l',m'} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

zu berechnen.
Dabei besteht zwischen ξ, η, ζ und r, ϑ, φ der Zusammenhang zwischen cartesischen und Kugelkoordinaten:

$$\xi \pm i\eta = r \sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi},$$
$$\zeta = r \cos\vartheta.$$

Welche Schlußfolgerungen ergeben sich aus der Lösung für die Linienintensität, welche Auswahl- und Polarisationsregeln gelten, was folgt daraus für den ZEEMAN-Effekt?

5. Relativitätstheorie

5.1. Spezielle Relativitätstheorie

Messungen von MICHELSON ergaben im Jahre 1881, daß auf der bewegten Erde das Licht – unabhängig von seiner Ausbreitungsrichtung – stets die gleiche Geschwindigkeit aufweist. Hierauf gründet sich die von EINSTEIN im Jahre 1905 entwickelte **spezielle Relativitätstheorie.** In ihrem *speziellen Relativitätsprinzip* geht sie davon aus, daß für jedes **Inertialsystem** das Licht in allen Richtungen die gleiche Geschwindigkeit hat. Als Inertialsystem bezeichnet man ein Bezugssystem, in welchem jeder Körper, der keinen äußeren Kräften unterliegt, sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.
Jedes gegenüber einem Inertialsystem Σ mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitende Koordinatensystem Σ' bildet gleichfalls ein Inertialsystem.
Die experimentelle Bestätigung für das spezielle Relativitätsprinzip wurde nach unterschiedlichen Methoden u. a. 1912 von HARRES, 1914 von SAGNAC und im selben Jahr von WIEN erbracht.
Im folgenden seien zwei Koordinatensysteme Σ und Σ' betrachtet. Das System Σ ist durch seine räumlichen Koordinaten $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ sowie durch die mit der Zeit t verbundene Koordinate $x_4 = ict$ definiert. In der gleichen Weise wird das System Σ' durch die vier Koordinaten x_1', x_2', x_3', x_4' repräsentiert. Gegenüber Σ bewegt sich Σ' mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit kann man die Ursprungspunkte 0(0, 0, 0, 0) und 0'(0, 0, 0, 0) beider Systeme als identisch voraussetzen.
Es wird die Ausbreitung einer zur Zeit $t = t' = 0$ vom Punkte 0(0, 0, 0) ausgehenden Kugelwelle betrachtet. Entsprechend dem Relativitätsprinzip erhält man für die Wellenfronten die Ausdrücke

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 = \sum_{j=1}^{4} x_j^2 = 0.$$

Vom System Σ' aus beurteilt, gilt in gleicher Weise

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2 = \sum_{j=1}^{4} x_j'^2 = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Transformationsformeln von LORENTZ. Wenn man als Richtung, unter der sich Σ' gegen Σ fortbewegt, die x-Achse beider Systeme wählt (Bild 135), so folgt nach LORENTZ

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Bild 135

Dabei ist $\beta = v/c$.
Nach Maßgabe der LORENTZ-Formeln wird auch die Zeit transformiert. Eine Zeit t', die von einer mit dem System Σ' bewegten Uhr festgestellt wird, bezeichnet man als die Eigenzeit des Systems Σ'. Die Geschwindigkeit substantieller Teilchen kann nicht größer als die Lichtgeschwindigkeit c sein. *Für die Grenzwertbetrachtung $c \to \infty$ geht die* **Lorentztransformation** *in die* **Galileitransformation** *der klassischen Physik über.*
Das *relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten* ergibt sich, wenn man die Geschwindigkeitskomponenten eines Körpers

$$q_j = \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}, \quad q_j' = \frac{\mathrm{d}x_j'}{\mathrm{d}t'}; \quad j = 1, 2, 3$$

in die Formeln für die LORENTZ-Transformation einsetzt. Man erhält dann

$$q_1' = \frac{q_1 - v}{1 - \dfrac{vq_1}{c^2}}, \quad q_2' = \frac{q_2\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{vq_1}{c^2}}, \quad q_3' = \frac{q_3\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{vq_1}{c^2}}.$$

Wenn sich ein Körper mit der Geschwindigkeit v bewegt und dabei unter einem Winkel ϑ gegen seine Bewegungsrichtung Lichtstrahlen der Frequenz ν_0 aussendet, so nimmt ein ruhender Beobachter eine Frequenz

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta\cos\vartheta}$$

wahr.
Die Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Ereignisses können nach MINKOWSKI als *Komponenten eines Vektors im vierdimensionalen Raum* aufgefaßt werden. Wenn man

die MAXWELLschen Gleichungen der Elektrodynamik in einem derartigen vierdimensionalen Raum formuliert, so ergibt sich als Beziehung zwischen der Masse und der ihr äquivalenten Energie

$$E = mc^2 \quad \text{(EINSTEIN-Gleichung).}$$

Außerdem erhält man die LORENTZ-Gleichung

$$\vec{F} = e\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Sie gibt die Kraft $\vec{F}$ an, die auf eine im elektrischen Feld $\vec{E}$ und im magnetischen Feld $\vec{B}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegte elektrische Ladung e einwirkt.

B Beispiele

243. In einem System Σ finden in den Punkten x_1 und x_2 zur Zeit $t = t_0$ gleichzeitig zwei Ereignisse statt. Der Abstand der beiden Punkte ist $x_2 - x_1 = 10000$ m. Das System Σ bewegt sich gegen ein System Σ' mit der Geschwindigkeit $v = 3 \cdot 10^5$ ms^{-1}. Wie werden beide Ereignisse im System Σ' registriert?

Lösung

Entsprechend der LORENTZ-Transformation ergeben sich für Σ' die Zeitkoordinaten

$$t_1' = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2' = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Hieraus folgt

$$t_1' - t_2' = \frac{v}{c^2}\,\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Mit den vorgegebenen Werten erhalten wir

$$t_1' - t_2' = \frac{3 \cdot 10^5}{(3 \cdot 10^8)^2}\,\frac{10^4}{\sqrt{1 - \left(\frac{3 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^8}\right)^2}}\,\text{s} = \frac{1}{3 \cdot 10^7 \sqrt{1 - 10^{-6}}}\,\text{s} \approx$$

$$\approx \frac{1}{3}\,10^{-7}\,\text{s}.$$

Demnach finden die in der Eigenzeit t des Systems Σ gleichzeitig auftretenden Ereignisse in der Eigenzeit t' des Systems Σ' nicht gleichzeitig, sondern zu verschiedenen Zeitpunkten statt (Relativität der Gleichzeitigkeit).

244. In einem Koordinatensystem Σ gebe eine Uhr an der Stelle $x = x_0$ Zeitsignale, die in einem Abstand $\Delta t = t_2 - t_1 = 1$ s aufeinanderfolgen. Ein anderes Koordinatensystem Σ' bewege sich gegenüber Σ mit einer Geschwindigkeit $v = 3 \cdot 10^5\ \mathrm{ms}^{-1}$. Wie groß erscheint die zeitliche Intervallänge in der Eigenzeit des Systems Σ'?

Lösung

Entsprechend der LORENTZ-Transformation gilt für die **Eigenzeit** t' die Beziehung

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{1}$$

Daraus folgt

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

und hieraus

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{2}$$

Im vorliegenden Fall ist $v \ll c$, so daß wir für Gl. (2) auch schreiben können:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Delta t \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right). \tag{3}$$

In Zahlen:

$$\Delta t' = 1 \left(1 + \frac{1}{2} \left[\frac{3 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^8}\right]^2\right) \mathrm{s} = \underline{\left(1 + \frac{1}{2} 10^{-6}\right) \mathrm{s}}.$$

Im bewegten System Σ' erscheinen die Intervalle Δt gedehnt. Dieser Effekt läßt sich auch in der Art deuten, daß der Gang einer gegen das Bezugssystem Σ' bewegten Uhr verlangsamt erscheint.

245. Ein Körper der Länge l bewegt sich gegenüber einem Beobachter mit der Geschwindigkeit v. Wie groß muß v sein, damit der 100 m lange Körper eine **Lorentzkontraktion** von einem Millimeter erfährt?

Lösung

Der bewegte Körper sei mit einem Koordinatensystem Σ verbunden. Als Bewegungsrichtung wählen wir die x-Achse. Für die Länge l des Körpers, gemessen im mitbewegten System Σ, schreiben wir

$$l = x_2 - x_1. \tag{1}$$

Dabei geben x_1 und x_2 die beiden Endpunkte des Körpers an. Der Beobachter befindet sich im Koordinatensystem Σ'. Entsprechend der LORENTZ-Transformation gilt

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{2}$$

Aus Gl. (1) folgt

$$l' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{3}$$

Die Punkte x_1 und x_2 sind dabei, betrachtet vom Beobachter in Σ', gleichzeitig anzuvisieren. Es muß also gelten: $t_1' = t_2'$. Damit erhalten wir aus Gl. (2)

$$t_2' - t_1' = 0 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

woraus sich

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) \tag{4}$$

ergibt. Wir setzen Gl. (4) in Gl. (3) ein und erhalten

$$l' = x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)\sqrt{1 - \beta^2} = l\sqrt{1 - \beta^2}. \tag{5}$$

Der in Σ' befindliche, nicht mitbewegte Beobachter nimmt eine Längsverkürzung wahr. Wenn wir $v \ll c$ voraussetzen, dann folgt

$$l' = l\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right).$$

Im vorliegenden Fall soll

$$l - l' = l\frac{\beta^2}{2} = 1\ \text{mm} = 10^{-3}\ \text{m}$$

sein. Damit ergibt sich wegen $l = 100$ m

$$v = c\sqrt{\frac{2\Delta l}{l}} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^2}}\ \text{ms}^{-1} = \underline{1{,}34 \cdot 10^6\ \text{ms}^{-1}}.$$

Ein experimenteller Nachweis dieses Effekts war wegen der hohen, zur Längskontraktion erforderlichen Geschwindigkeiten, bislang noch nicht möglich.

246. Gegenüber einem festen Bezugspunkt P bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit $v_1 = 0{,}6\,c$ nach links. Ein zweiter Körper bewegt sich dagegen mit der Geschwindigkeit $v_2 = 0{,}8\,c$ nach rechts (Bild 136). Wie groß ist, beurteilt von einem der beiden Körper aus, ihre Relativgeschwindigkeit q' gegeneinander?

Bild 136

Lösung

Gemäß dem relativistischen Additionstheorem der Geschwindigkeiten gilt für die Relativgeschwindigkeit q', beobachtet vom System Σ' aus (Bild 136), die Beziehung

$$q' = q_1' = \frac{q_1 - v}{1 - \frac{vq_1}{c^2}} \,.$$

Wir setzen das System Σ als ruhend voraus. Es befindet sich jedoch in ihm ein Körper, der sich, von Σ aus beurteilt, mit der Geschwindigkeit $v_1(q_1, 0, 0)$, $q_1 = -v_1 = -0{,}6\,c$ bewegt. Von dem mit der Geschwindigkeit $v = v_2 = 0{,}8\,c$ gegen Σ bewegten System Σ' aus gesehen, stellen wir die Geschwindigkeit

$$q' = \frac{(-0{,}6 - 0{,}8)\,c}{1 + 0{,}8 \cdot 0{,}6} = -\frac{1{,}4\,c}{1{,}48} = \underline{-0{,}946\,c}$$

fest. Im Gegensatz zu den Aussagen der klassischen Physik wird also eine Relativgeschwindigkeit registriert, die kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist. Auch dieser Effekt läßt sich durch eine Längskontraktion erklären.

247. Zwei kohärente Lichtstrahlen der Wellenlänge $\lambda = 6 \cdot 10^2$ nm werden über eine Strecke der Länge $l = 10$ m durch eine strömende Flüssigkeit mit der Brechzahl $n = 1{,}33$ geleitet (Bild 137). Im ersten Fall sind Flüssigkeitsströmung und Lichtstrahl einander

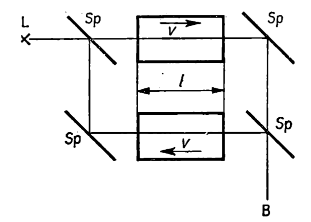


Bild 137. Zur Berechnung der Geschwindigkeit eines Strahlung emittierenden Wasserstoffatoms

entgegengesetzt, im zweiten Fall einander gleich gerichtet. In beiden Fällen sei die Geschwindigkeit der Strömung dem Betrage nach gleich groß. Wie groß muß die Strömungsgeschwindigkeit v sein, wenn die zwei Lichtstrahlen gegeneinander eine Phasenverschiebung von einer halben Periode erhalten sollen?

Lösung

In der ruhenden Flüssigkeit beträgt die Lichtgeschwindigkeit $c_F = c/n$. Wir verknüpfen eine der beiden Flüssigkeiten mit dem Koordinatensystem Σ, den Beobachter aber mit dem System Σ'. Gemäß dem relativistischen Additionstheorem der Geschwin-

digkeiten ergibt sich für den gegenüber der strömenden Flüssigkeit ruhenden Beobachter als Relativgeschwindigkeit c_r des Lichts

$$c_r^+ = \frac{c_F + v}{1 + \frac{vc_F}{c^2}}, \quad c_r^- = \frac{c_F - v}{1 - \frac{vc_F}{c^2}}.$$

Wegen der Voraussetzung $v \ll c_F = c/n$ können wir hierfür schreiben:

$$c_r^+ = (c_F + v)\left(1 - \frac{vc_F}{c^2}\right), \quad c_r^- = (c_F - v)\left(1 + \frac{vc_F}{c^2}\right).$$

Wenn wir die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigen, folgt daraus

$$c_r^+ = c_F + v - \frac{c_F^2}{c^2} v = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$c_r^- = c_F - v + \frac{c_F^2}{c^2} v = \frac{c}{n} - v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Der Faktor $(1 - 1/n^2)$ wird als **Fresnelscher Mitführungskoeffizient** bezeichnet. Er ist um so größer, je größer die optische Dichte des bewegten Mediums ist, und verschwindet im Fall $n = 1$ (Vakuum). Längs einer Flüssigkeitsstrecke l haben wir eine bestimmte Anzahl Wellen (N). Für N gilt

$$N = l\frac{1}{\lambda_F} = l\frac{c}{c_r}\frac{1}{\lambda}.$$

Dabei gibt λ die Vakuumwellenlänge, λ_F die Wellenlänge in der Flüssigkeit an. Für die in Strahlrichtung strömende Flüssigkeit messen wir demzufolge als Wellenzahl längs der Strecke l

$$N^+ = l\frac{c}{\lambda}\frac{1}{c_r^+} = l\frac{c}{\lambda}\frac{1}{\frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = n\frac{l}{\lambda}\left[1 - \frac{v}{c}n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right],$$

für die entgegen der Strahlrichtung strömende Flüssigkeit aber

$$N^- = l\frac{c}{\lambda}\frac{1}{c_r^-} = l\frac{c}{\lambda}\frac{1}{\frac{c}{n} - v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = n\frac{l}{\lambda}\left[1 + \frac{v}{c}n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Wenn die Differenz beider Wellenzahlen gerade eine halbe Periode sein soll, so muß gelten:

$$N^- - N^+ = l\frac{n}{\lambda}\frac{v}{c}n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{l}{\lambda}\frac{v}{c}(n^2 - 1) = \frac{1}{2}.$$

Hieraus erhalten wir für die gesuchte Geschwindigkeit v der strömenden Flüssigkeit die Aussage

$$v = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{l}\frac{c}{n^2 - 1} = \frac{1}{2}\frac{600 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^8}{10\left[\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1\right]}\,\mathrm{ms}^{-1} = \frac{81}{7}\,\mathrm{ms}^{-1} = \underline{\underline{11{,}57\,\mathrm{ms}^{-1}}}.$$

Die Relativgeschwindigkeit, mit der die beiden Flüssigkeitsströme sich gegeneinander bewegen, muß also $2v = 23{,}14 \text{ ms}^{-1}$ sein.

248. In einem Kanalstrahl bewegt sich ein Wasserstoffatom und sendet dabei Licht aus. Ein ruhender Beobachter mißt für die in Richtung des Kanalstrahls emittierte H_α-Linie eine Wellenlänge $\lambda^- = 6532{,}44 \cdot 10^{-10}$ m, für den entgegengesetzt emittierten Lichtstrahl eine Wellenlänge $\lambda^+ = 6593{,}22 \cdot 10^{-10}$ m. Die Messung wird so ausgeführt, daß man das primäre Licht des Kanalstrahls mit dem an einem Spiegel reflektierten Licht des in entgegengesetzter Richtung emittierten Strahls vergleicht. Wie groß ist die Geschwindigkeit des die Strahlung emittierenden Wasserstoffatoms?[1]) $\lambda_{\mathrm{H}\alpha} = 6562{,}76 \cdot 10^{-10}$ m

Lösung

Wir bezeichnen mit ν_0 die in der Eigenzeit des Wasserstoffatoms gemessene emittierte Frequenz, wie sie ein mit dem Atom zusammen **bewegter Beobachter** wahrnimmt. $\lambda_0 = \lambda_{\mathrm{H}\alpha}$ gibt die emittierte Wellenlänge an. Das Atom bewege sich mit der Geschwindigkeit v und sende unter dem Winkel ϑ gegen seine Bewegungsrichtung einen Lichtstrahl aus (Bild 138). Ein ruhender Beobachter mißt die Frequenz der emittierten Strahlung zu

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\cos\vartheta}. \qquad (1)$$

Für die Wellenlänge ergibt sich

$$\lambda = \lambda_0 \frac{1-\cos\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}} = $$

$$= \lambda_0 \left(1 - \beta\cos\vartheta + \frac{1}{2}\beta^2 \pm \cdots\right). \qquad (2)$$

LS
B
KS

KS Kanalstrahl
LS Lichtstrahl
B Beobachter

Bild 138

Erfolgt die Strahlung in Richtung des Kanalstrahls, so ist $\vartheta = 0$. Für die Wellenlänge der emittierten Strahlung erhalten wir aus Gl. (2) die Beziehung

$$\lambda^- = \lambda_0 \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \lambda_0 \left(1 - \beta + \frac{\beta^2}{2} \pm \cdots\right). \qquad (3)$$

Hingegen stellen wir für einen dem Kanalstrahl entgegengesetzt emittierten Lichtstrahl eine Wellenlänge

$$\lambda^+ = \lambda_0 \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \lambda_0 \left(1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + \cdots\right) \qquad (4)$$

[1]) Ives, H. I., Stillwell, G. R.: Journ. Opt. Soc. **28**, 215, 1938; **29**, 183 und 294, 1939. – Otting, G.: Diss. München, Phys. Z. S. **40**, 681, 1939. Die relativistische Deutung des Effekts wurde von Otting gegeben

fest. Das primäre Licht ist also nach Blau, das sekundäre nach Rot verschoben. Der Mittelwert

$$\frac{\lambda^- + \lambda^+}{2} = \lambda_0 \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) \tag{5}$$

weist gegenüber der Strahlung des nichtbewegten Wasserstoffatoms eine geringe Rotverschiebung auf (*relativistische Rotverschiebung*). Im vorliegenden Fall ist

$$\frac{\lambda^- + \lambda^+}{2} = \frac{6532{,}44 + 6593{,}22}{2} \cdot 10^{-10}\,\text{m} = 6562{,}83 \cdot 10^{-10}\,\text{m}. \tag{6}$$

Gegenüber der H_α-Linie des ruhenden Atoms tritt also gemäß Gl. (5) eine relativistische Rotverschiebung

$$\frac{\lambda^- + \lambda^+}{2} - \lambda_0 = (6562{,}83 - 6562{,}76) \cdot 10^{-10}\,\text{m} = 0{,}070 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$$

$$= \lambda_0 \frac{v^2}{2c^2} \tag{7}$$

auf.
Aus der Verschiebung

$$\lambda^+ - \frac{\lambda^- + \lambda^+}{2} = \lambda_0 \frac{v}{c} = \tag{8}$$

$$= (6593{,}22 - 6562{,}83) \cdot 10^{-10}\,\text{m} = 30{,}39 \cdot 10^{-10}\,\text{m} = 6562{,}76 \cdot 10^{-10}\,\text{m}\,\frac{v}{c}$$

erhalten wir

$$v = \frac{30{,}39}{6562{,}76}\,c = 4{,}63 \cdot 10^{-3}\,c = \underline{1389\,\text{kms}^{-1}}. \tag{9}$$

Der gleiche Wert ergibt sich aus der Verschiebung

$$\frac{\lambda^- + \lambda^+}{2} - \lambda^- = \lambda_0 \beta.$$

Wir berechnen zur Probe

$$\lambda_0 \frac{\beta^2}{2} = 6562{,}76 \cdot 10^{-10}\,\text{m}\,\frac{(1{,}389 \cdot 10^6)^2}{2(3 \cdot 10^8)^2}$$

und erhalten

$$\lambda_0 \frac{\beta^2}{2} = 0{,}070 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (7).

249. Die Lebensdauer des μ-Mesons wurde von Rasetti durch Messung der Zeitdifferenz Δt zwischen dem Einfallen des Mesons und dem Auftreten des beim Zerfall entstehenden Sekundärelektrons bestimmt. Hierfür ergibt sich $\Delta t \approx 2 \cdot 10^{-6}$ s. Aus Absorptionsmessungen an μ-Mesonen der kosmischen Strahlung muß man auf einen Zerfallsweg von etwa 20 km Länge schließen. Welches Massenverhältnis (Masse des bewegten Teilchens gegen Ruhmasse) folgt hieraus? Wie groß ist die Geschwindigkeit der μ-Mesonen?

Lösung

Wir setzen zunächst in erster Näherung die Geschwindigkeit v der Mesonen mit der Lichtgeschwindigkeit c gleich. Aus dem Zerfallsweg von 20 km Länge folgt damit eine Zerfallszeit

$$\Delta t' = \frac{20 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8}\,\mathrm{s} = \frac{2}{3}\,10^{-4}\,\mathrm{s}.$$

Sie wird von einem gegenüber dem Meson bewegten Beobachter gemessen. Wenn wir dagegen die Messung der Zerfallszeit in der Eigenzeit des Mesons ausführen, so folgt

$$\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}.$$

Wegen

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ergibt sich

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\frac{2}{3}\,10^{-4}}{2 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Hieraus erhalten wir

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 9 \cdot 10^{-4},$$

also für die Geschwindigkeit der μ-Mesonen den Wert

$$v = \sqrt{1 - 9 \cdot 10^{-4}}\; c = \underline{(1 - 4{,}5 \cdot 10^{-4})\, c,}$$

d. h. nur eine geringfügige Abweichung gegenüber der Lichtgeschwindigkeit.
Aus der Beziehung

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

folgt für das Verhältnis der bewegten Masse zur Ruhmasse

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - 9 \cdot 10^{-4})}} = \frac{1}{3}\,10^2 \approx \underline{30.}$$

Infolge der hohen Geschwindigkeit hat also die bewegte Masse den dreißigfachen Wert der Ruhmasse.
Weitere Beispiele zur Abhängigkeit der Energie von der Masse und zur relativistischen Massenveränderlichkeit sind in den Beispielen 173 bis 179 enthalten.

A Aufgaben

347. Wie groß ist die Längskontraktion für einen mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}1\,c$ bewegten Körper von $l = 1$ m Länge?
348. Welche Geschwindigkeit muß ein bewegter Körper haben, damit eine LORENTZ-Verkürzung auf die Hälfte der ursprünglichen Länge eintritt?
349. In einem Bezugssystem I werden im Abstand $\Delta t = 4$ s Signale ausgesandt. In dem gegen I bewegten System II werden diese Signale aber im Abstand $\Delta t' = 5$ s registriert. Welche Geschwindigkeit hat das System II gegenüber dem System I?
350. Ein Wasserstoffatom bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}01\,c$ und emittiert dabei die H_α-Linie. Berechnen Sie die wahrzunehmende Wellenlänge für die Bewegungsfälle
   a) auf den Beobachter zu,
   b) vom Beobachter weg,
   c) gegen die Beobachtungsrichtung unter einem Winkel $\vartheta = 90°$.
351. Zwei Raketen bewegen sich gegenüber einem festen Bezugspunkt: die eine mit der Geschwindigkeit $v_1 = 0{,}9\,c$ nach links, die andere mit der Geschwindigkeit $v_2 = 0{,}9\,c$ nach rechts. Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit, mit welcher sich beide Raketen gegeneinander bewegen für die Fälle
   a) vom festen Bezugspunkt aus,
   b) von einer der beiden Raketen aus beurteilt?
352. Von der in Aufgabe 351 dargestellten, nach rechts fliegenden Rakete wird ein Geschoß abgefeuert, das, von der Rakete aus beurteilt, wiederum mit einer Geschwindigkeit von $0{,}9\,c$ gleichfalls nach rechts fliegt. Welche Relativgeschwindigkeit wird von der nach links fliegenden Rakete gemessen?
353. Ein bewegter Körper besitze die Geschwindigkeitskomponenten $q_x = 0{,}1\,c$; $q_y = 0{,}2\,c$; $q_z = -0{,}1\,c$. Gegen das verwendete Koordinatensystem bewege sich ein zweites mit der Geschwindigkeit $v = v_x = 0{,}4\,c$. Welche Geschwindigkeitskomponenten hat der betrachtete Körper, vom bewegten Bezugssystem aus gemessen?
354. In einem Bezugssystem bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit v_1. Ein zweites Bezugssystem ist gegen das erste mit der Geschwindigkeit v_2 bewegt. Welcher Betrag der Relativgeschwindigkeit ergibt sich für den bewegten Körper, vom zweiten Bezugssystem aus beurteilt? Berechnen Sie hiernach für Aufgabe 353 den Betrag der Relativgeschwindigkeit.
355. Welche Energie ist notwendig, um ein Elektron der Ruhmasse $m_0 = 9{,}1 \times \times 10^{-31}$ kg aus der Ruhelage bis auf die Geschwindigkeit $v = 0{,}99\,c$ zu beschleunigen?
356. Wie groß ist die Masse eines Elektrons, das eine Bewegungsenergie von 10 keV hat?
357. Bei der Elektronenbeschleunigung im Betatron werden die Teilchen durch ein Magnetfeld der Induktion B auf einer Kreisbahn gehalten. Im Endzustand betrage der Kreisbahndurchmesser 0,15 m, die Amplitude des Induktionsflusses sei $\Phi = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ Vs. Berechnen Sie Geschwindigkeit, Masse und Energie der beschleunigten Elektronen. Anfangsgeschwindigkeit und Anfangsinduktion können gleich Null gesetzt werden.

5.2. Allgemeine Relativitätstheorie

Die von EINSTEIN im Jahre 1915 geschaffene **allgemeine Relativitätstheorie** formuliert die physikalischen Gesetze in *kovarianten Gleichungen*, die unabhängig vom **Inertialsystem** gelten. Sie befreit damit die Physik von der Notwendigkeit, spezielle Inertialsysteme einzuführen, für die allein die bisher formulierten Gesetze gültig waren. Mit dieser Theorie eröffnet sich ein Zugang zur Lösung grundlegender **kosmologischer Fragen.** Obgleich beim gegenwärtigen Stand der Entwicklung weder die astronomischen noch die theoretischen Kenntnisse ausreichend sind, um endgültige Aussagen über den Aufbau des **Universums** zu gestatten, lassen sich doch bereits weitreichende Schlußfolgerungen ziehen.
Die allgemeine Relativitätstheorie gründet sich auf den Begriff des Feldes als eines selbständigen, nicht reduzierbaren Grundbegriffs, wobei sie die *Gleichheit von träger und schwerer Masse* postuliert:

$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Beschleunigung}} = \text{träge Masse} = \text{schwere Masse} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Feldintensität}}.$$

In einem mit konstanter Beschleunigung g bewegten Bezugssystem ergeben sich danach grundsätzlich die gleichen physikalischen Erscheinungen wie im Erdschwerefeld.
Aus einer Diskussion der kovarianten Feldgleichungen geht hervor, daß für astronomische Abmessungen im Weltraum die ebene **Euklidische Geometrie** nicht anzuwenden ist, sondern daß hier eine schon von GAUSS, RIEMANN und LEVI-CIVITÀ entwickelte **Geometrie gekrümmter Flächen und Räume** Gültigkeit hat. Es erweist sich als zweckmäßig, von geometrischen Analogien auszugehen.
Nach der GAUSSschen Flächentheorie läßt sich die Krümmung einer zweidimensionalen Fläche, z. B. der Erdoberfläche, allein aus Messungen auf dieser Fläche bestimmen. In gleicher Weise kann die Geometrie des dreidimensionalen Raumes als Geometrie auf einer Hyperfläche in einem fiktiven vierdimensionalen Raum gedeutet werden. Auch die Krümmung der dreidimensionalen Sphäre läßt sich nach der RIEMANNschen Geometrie allein aus Messungen in dieser Sphäre bestimmen.
Die Krümmungsverhältnisse in den Bahnen der Massenpunkte, die sonst keinen äußeren Kräften unterliegen, wirken sich wie Kräfte physikalischen Ursprungs aus. Auf diese Weise finden die Gravitationskräfte ihre physikalische Erklärung.
Entfernt sich ein Lichtstrahl von einem das Gravitationsfeld erzeugenden Körper, nimmt also in Richtung des Strahles der Betrag des Gravitationspotentials φ ab, so verringert sich die Frequenz des ausgesandten Lichts. Für schwache Gravitationsfelder, d. h. für $|\varphi| \ll c^2$, ergibt sich folgende Beziehung: Wird in einem Punkt mit dem Potential φ_0 eine Schwingung der Frequenz ν_0 erzeugt, so nimmt der Beobachter an

einem Punkt mit dem Potential φ die Frequenz

$$\nu = \frac{\nu_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right)}{1 - \frac{\varphi_0}{c^2}} = \nu_0\left(1 + \frac{\varphi_0 - \varphi}{c^2}\right)$$

wahr. Die an verschiedenen Punkten des Weltalls ausgestrahlten Spektren haben also bei ihrer Entstehung überall das gleiche Aussehen. Bei ihrer Wahrnehmung auf der Erde zeigen sich jedoch infolge der unterschiedlichen Gravitationsfelder Frequenzverschiebungen.

Aus den von FRIEDMAN im Jahre 1922 abgeleiteten Lösungsfunktionen der allgemeinen Relativitätstheorie ergibt sich, daß das Universum eine zeitlich veränderliche Ausdehnung hat. Allgemeine Untersuchungen von LIFSCHITZ führten 1946 zu dem Ergebnis, daß eine expandierende Welt stabil, eine kontrahierende dagegen instabil ist. Diese *Theorie des expandierenden Weltalls* findet ihre Bestätigung durch umfangreiche astronomische Beobachtungen, die erstmalig von HUBBLE ausgeführt wurden. Nach diesen Untersuchungen zeigen die extragalaktischen, nicht mehr zu unserem Milchstraßensystem gehörenden Spiralnebel eine Rotverschiebung, welche darauf zurückzuführen ist, daß sich diese Nebel von uns weg bewegen. Als Beziehung zwischen dem Abstand r eines solchen Spiralnebels, seiner Radialgeschwindigkeit v und der Frequenzverschiebung $\Delta\nu$ ergeben sich die beiden Gleichungen

$$-\frac{\Delta\nu}{\nu} = kr, \quad v = -c\frac{\Delta\nu}{\nu} = kcr.$$

Die HUBBLE-Konstante k ist bisher nur größenordnungsmäßig bekannt. Ihr Wert liegt bei

$$k \approx 10^{-26}\ \mathrm{m}^{-1}.$$

Wichtige experimentelle bzw. beobachtbare *Bestätigungen für die allgemeine Relativitätstheorie sind* außer der *Spektralverschiebung* auch die *Perihelbewegung des Planeten Merkur* und die *Ablenkung des Lichtstrahls* in starken Gravitationsfeldern.

B Beispiele

250. In einer Höhe $H = 21$ m über der Erdoberfläche befindet sich eine Strahlungsquelle. Ihre Strahlung wird an der Erdoberfläche registriert. Berechnen Sie die Frequenzverschiebung infolge der Gravitationswirkung des Erdschwerefeldes (Bild 139).

Lösung

Wir denken uns ein Atom im Grundzustand mit der Energie E auf der Erdoberfläche. Durch Energiezufuhr wird dieses Atom angeregt und dabei in den Energiezustand E' versetzt. Danach bringen wir das Atom auf die Höhe $H = 21$ m. Da

$$m' = \frac{E'}{c^2}$$

die gesamte Masse des Atoms im angeregten Zustand darstellt, haben wir gegen das Gravitationsfeld der Erde die Energie

$$m'gH = \frac{E'gH}{c^2} \tag{1}$$

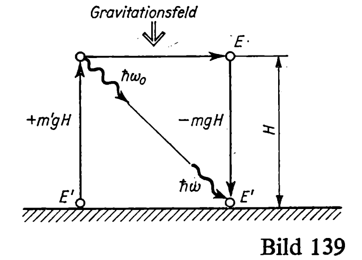


Bild 139

aufzubringen, die dem System zugeführt wird.
Das angeregte Atom emittiere in der Höhe H ein Photon und gehe bei diesem Elementarakt wieder in den energetischen Grundzustand E über. Die emittierte Frequenz ω_0, gemessen in der Eigenzeit des Atoms, folgt aus

$$\omega_0 = \frac{E' - E}{\hbar}. \tag{2}$$

Wir transportieren nunmehr das jetzt im Grundzustand befindliche Atom wieder zur Erdoberfläche zurück, wobei das System die Energie

$$mgH = \frac{E}{c^2}gH \tag{3}$$

abgibt. Durch Absorption des in der Höhe H emittierten Photons, dem wir an der Erdoberfläche die Energie $\hbar\omega$ zuordnen, wird das Atom aus dem Grundzustand wieder in den angeregten Zustand überführt. Nach dem Energieerhaltungsgesetz ergibt sich aus den Gln. (1) u. (3)

$$E' + \frac{E'gH}{c^2} - \hbar\omega_0 - \frac{EgH}{c^2} + \hbar\omega = E', \tag{4}$$

d. h.

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 + \frac{E - E'}{c^2}gH. \tag{5}$$

Hieraus erhalten wir nach Division durch $\hbar$ und unter Verwendung der Gl. (2)

$$\omega = \omega_0 + \frac{\omega_0}{c^2}gH = \omega_0\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right). \tag{6}$$

Demnach wird auf der Erdoberfläche eine höhere Frequenz registriert als in der Höhe H **(Blauverschiebung).** Mit den vorgegebenen Zahlenwerten erhalten wir eine relative Frequenzzunahme

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{gH}{c^2} = \frac{9{,}81 \cdot 21}{(3 \cdot 10^8)^2} = \underline{0{,}229 \cdot 10^{-14}}. \tag{7}$$

Erstmalig durch Anwendung des **Mößbauereffekts** wurde ein experimenteller Nachweis dieses Effekts der allgemeinen Relativitätstheorie möglich.[1])

251. Im Gravitationsfeld der Erde bewegt sich eine Uhr mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10^4\ \mathrm{ms^{-1}}$ senkrecht nach oben. Die Erdbeschleunigung werde im Verlauf des Aufsteigens und während des nachfolgenden freien Falls konstant $g = 9{,}81\ \mathrm{ms^{-2}}$ gesetzt. Luftreibung ist zu vernachlässigen. Wie groß ist die Zeitdifferenz gegenüber einer auf der Erdoberfläche ruhenden Uhr, wenn die bewegte Uhr wieder zurückkehrt?

Lösung

Infolge der Wirkung des Gravitationsfeldes zeigt eine Uhr, die sich – von der Erdoberfläche aus beurteilt – für das Zeitintervall $\mathrm{d}t$ in der Höhe H aufhält, in der Eigenzeit das Zeitintervall

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right). \tag{1}$$

Die Bewegung mit der Geschwindigkeit v bedingt andererseits, daß ein auf der Erdoberfläche zurückbleibender Beobachter die Zeit

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

registriert, wenn die bewegte Uhr das Zeitintervall $\mathrm{d}t'$ anzeigt (Beispiel 444). Für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ folgt hieraus

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \mathrm{d}t\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right). \tag{3}$$

Wenn wir beide Korrekturen zusammenfassen, so finden wir, daß die in der Höhe H mit der Geschwindigkeit v bewegte Uhr das Zeitintervall

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t\left[1 + \frac{gH}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right] \tag{4}$$

anzeigt, während die auf der Erdoberfläche ruhende Uhr das Zeitintervall $\mathrm{d}t$ angibt. Zur Berechnung des von der bewegten Uhr während des Auf- und Absteigens angezeigten Zeitintervalls $\Delta t'$ berechnen wir das Integral

$$\Delta t' = \int_0^{\Delta t} \mathrm{d}t' = \int_0^{\Delta t}\left(1 + \frac{gH}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right)\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Dabei haben wir entsprechend den Gesetzen des freien Falls zu schreiben:

$$H = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t, \quad v = v_0 - gt. \tag{6}$$

[1]) Versuch von Pound und Rebka, Harvard-Universität 1959

Wir setzen Gl. (6) in Gl. (5) ein und erhalten

$$\Delta t' = \Delta t + \frac{1}{c^2}\int_0^{\Delta t}\left[-\frac{g^2}{2}t^2 + gv_0 t - \frac{(v_0 - gt)^2}{2}\right] dt. \tag{7}$$

Wir bestimmen die von beiden Uhren angegebenen Zeiten, wenn die bewegte Uhr wieder auf der Erdoberfläche auftrifft. Für die unbewegte Uhr folgt aus der ersten Gleichung in Gl. (6), wenn wir $H = 0$ setzen,

$$t = \Delta t = \frac{2v_0}{g}. \tag{8}$$

Wir integrieren Gl. (7), setzen den gefundenen Wert in Gl. (8) ein und erhalten

$$\Delta t' = \Delta t\left(1 - \frac{1}{c^2}\left[\frac{v_0^2}{2} - gv_0\Delta t + \frac{g^2\Delta t^2}{3}\right]\right) = \Delta t\left(1 + \frac{v_0^2}{6c^2}\right). \tag{9}$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich aus Gl. (8)

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 10^4}{9{,}81}\ \mathrm{s} = \underline{2038{,}7\ \mathrm{s}}$$

und aus Gl. (9)

$$\Delta t' = 2038{,}7\left(1 + \frac{10^8}{6\,(3 \cdot 10^8)^2}\right)\mathrm{s} = \underline{2038{,}7\ (1 + 1{,}85 \cdot 10^{-10})\ \mathrm{s}.}$$

Die Abweichung liegt also in einer Größenordnung, die für einen experimentellen Nachweis die Anwendung des MÖSSBAUER-Effekts oder der Lasertechnik erfordert.

Zur Behandlung der Beispiele 250 und 251 hätte auch von vornherein die Theorie des schwachen Gravitationsfeldes entsprechend der Einführung in die allgemeine Relativitätstheorie herangezogen werden können.

252. Der Begleiter des Sirius hat die Masse $m = 1{,}68 \cdot 10^{30}$ kg, sein Radius ist $r = 1{,}88 \times \times 10^4$ km. An der Oberfläche dieses Sterns wird die H_α-Linie emittiert ($\lambda_{H\alpha} = 6564{,}68 \times \times 10^{-10}$ m). Berechnen Sie die auf der Erdoberfläche gemessene Wellenlänge und den Betrag der Rotverschiebung. Welche Radialgeschwindigkeit müßte der Siriusbegleiter haben, wenn die auftretende Rotverschiebung ohne Gravitationsfeld, nur als DOPPLER-Effekt, auftreten sollte?

Lösung

Wir wenden die für das schwache Gravitationsfeld gültigen Formeln an. Die Gravitationskonstante hat den Wert $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$. Für das Gravitationspotential φ_0 an der Oberfläche des Siriusbegleiters gilt

$$\varphi_0 = -\gamma\frac{m}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}68 \cdot 10^{30}}{1{,}88 \cdot 10^7}\ \mathrm{J\,kg^{-1}} = -5{,}96 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m^2s^{-2}}.$$

Dagegen müssen wir für das Erdpotential φ schreiben

$$\varphi = -\gamma\frac{m_E}{r_E} = -gr_E = -9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m^2s^{-2}} = -6{,}25 \cdot 10^7\ \mathrm{m^2s^{-2}}.$$

Dabei bedeutet g die Erdbeschleunigung, r_E und m_E Erdradius bzw. Erdmasse. Wir finden $|\varphi| \ll |\varphi_0|$. Für die auf der Erde gemessene Frequenz der H_α-Linie erhalten wir somit

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{\varphi_0}{c^2}} \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right) = \nu_0 \left(1 - \frac{\varphi - \varphi_0}{c^2}\right) =$$

$$= \nu_0 \left(1 - \frac{5{,}96 \cdot 10^{12} - 6{,}25 \cdot 10^7}{(3 \cdot 10^8)^2}\right) = \nu_0 \, (1 - 6{,}6 \cdot 10^{-5}).$$

Für die Wellenlänge der H_α-Linie folgt also

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{\nu_0}(1 + 6{,}6 \cdot 10^{-5}) = 6564{,}68 \cdot 10^{-10}(1 + 6{,}6 \cdot 10^{-5})\,\text{m} =$$

$$= \underline{6565{,}11 \cdot 10^{-10}\,\text{m}}.$$

Demnach tritt eine Rotverschiebung

$$\Delta\lambda = \underline{0{,}43 \cdot 10^{-10}\,\text{m}}$$

auf.

Nach der Theorie des DOPPLER-Effekts zeigt eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Lichtquelle die Wellenlängenverschiebung

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_0 \frac{v}{c}.$$

Hieraus folgt

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} c = \frac{0{,}43 \cdot 10^{-10}}{6564{,}68 \cdot 10^{-10}} \cdot 3 \cdot 10^8\,\text{ms}^{-1} = \underline{19{,}6 \cdot 10^3\,\text{ms}^{-1}}.$$

Die infolge des Gravitationsfeldes auftretende Rotverschiebung entspricht demnach einer Geschwindigkeit der bewegten Lichtquelle von 19,6 kms^{-1}.

253. Die Strahlung eines extragalaktischen Nebels zeige für die H_α-Linie des Wasserstoffatoms die Wellenlänge $\lambda = 6630 \cdot 10^{-10}$ m. Berechnen Sie aus dieser Angabe Entfernung und Radialgeschwindigkeit des Nebels. Die Wellenlänge der H_α-Linie auf der Erde beträgt $\lambda = 6564 \cdot 10^{-10}$ m.

Lösung

Für die mittlere relativistische Frequenzverschiebung und den Abstand r besteht nach HUBBLE die Beziehung

$$-\frac{\Delta\nu}{\nu} = kr. \tag{1}$$

Ferner gilt für den Zusammenhang zwischen Frequenzverschiebung und Geschwindigkeit des Nebels die Beziehung

$$-c\frac{\Delta\nu}{\nu} = v = kcr. \tag{2}$$

Hierin ist $k \approx 10^{-26}\ \mathrm{m}^{-1}$ die HUBBLE-Konstante.
Im vorliegenden Fall ist

$$-\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{6630 - 6564}{6564} = \frac{66}{6564} \approx 0{,}01. \tag{3}$$

Aus den Gln. (1) u. (3) erhalten wir damit für den Abstand des Nebels die Angabe

$$r = -\frac{\Delta\nu}{\nu}\frac{1}{k} \approx \frac{0{,}01}{10^{-26}}\ \mathrm{m} = \underline{10^{24}\ \mathrm{m}}, \tag{4}$$

das sind etwa 10^8 Lichtjahre. Für die Geschwindigkeit des Nebels in radialer Richtung erhalten wir aus den Gln. (2) u. (4)

$$v = kcr \approx 10^{-26} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{24}\ \mathrm{ms}^{-1} = 3 \cdot 10^6\ \mathrm{ms}^{-1} = \underline{\frac{c}{100}}.$$

A Aufgaben

358. Eine Uhr wird im Erdschwerefeld mit der Anfangsgeschwindigkeit
$v_0 = 1\ \mathrm{km\,s^{-1}}$
senkrecht nach oben geworfen. Welche Zeitdifferenz gegenüber einer auf der Erdoberfläche ruhenden Uhr zeigt sich, wenn die bewegte Uhr die Erdoberfläche wieder erreicht?

359. Eine Uhr wird mit der konstanten Beschleunigung $a = g/2$ und der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 1\ \mathrm{km\,s^{-1}}$ senkrecht nach oben bewegt. Welche Zeitdifferenz wird gegenüber einer auf der Erdoberfläche ruhenden Uhr festgestellt, wenn die bewegte Uhr die Erdoberfläche wieder erreicht?

360. Von einer auf der Erdoberfläche stehenden Lichtquelle wird die H_α-Linie ausgestrahlt ($\lambda = 6562{,}7 \cdot 10^{-10}$ m). Welche Wellenlängenverschiebung stellt ein Beobachter in 10 km Höhe fest? Welcher DOPPLER-Geschwindigkeit entspricht diese Verschiebung?

361. Welche Wellenlängenverschiebung zeigt die auf der Sonnenoberfläche ausgestrahlte H_α-Linie bei ihrer Registrierung auf der Erdoberfläche?
(Sonnenmasse $m_\odot = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg,
Sonnenradius $r_\odot = 6{,}95 \cdot 10^8$ m,
$\lambda_{H\alpha} = 6564{,}7 \cdot 10^{-10}$ m,
$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$)

362. Welche Wellenlängenverschiebung würde eine auf der Sonnenoberfläche ausgestrahlte H_α-Linie zeigen, wenn sie auf dem Siriusbegleiter registriert werden könnte? (Masse des Siriusbegleiters $m = 1{,}68 \cdot 10^{30}$ kg, Radius $r = 1{,}88 \times \times 10^7$ m)

363. Im intergalaktischen Raum, fern von allen Gravitationsfeldern, strahlt ein Wasserstoffatom die H_α-Linie aus. Welche Wellenlängenverschiebung wird auf der Erdoberfläche gemessen?

364. Als Krümmungsradius des Universums wird ein Wert $R = 5 \cdot 10^{25}$ m geschätzt. Berechnen Sie, welche Rotverschiebung das Licht eines Spiralnebels erleidet, der sich im Abstand $r = 2R$ befindet. Wie groß ist die Radialgeschwindigkeit des Nebels? (HUBBLE-Konstante $k \approx 10^{-26}\ \mathrm{m}^{-1}$)

Lösungen zu den Aufgaben

1. $Q = 23{,}36 \cdot 10^{-9}$ C
2. $\varepsilon_r' = 2{,}21$
3. $Q = \dfrac{e}{\sqrt{3}}$
4. $Q = 0{,}86 \cdot 10^{-12}$ C
5. Die elektrostatische Abstoßung ist $41{,}8 \times \times 10^{47}$mal so groß wie die Massenanziehung
6. $\sigma = 3{,}1832 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Cm^{-2}}$
7. $E_6 = 359{,}3 \cdot 10^6\,\mathrm{Vm^{-1}}$; $E_{12} = 89{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{Vm^{-1}}$; $E_{18} = 39{,}9 \cdot 10^6\,\mathrm{Vm^{-1}}$
8. a) Im Abstand 11,17 cm von der größeren Ladung ist $E = 0$
   b) Die Potentiale sind im Abstand 12,31 cm von der größeren Ladung gleich groß
9. $U = 178{,}7 \cdot 10^3$ V
10. $r = 59{,}9$ m
11. $U \approx 1408$ V
12. $U = 900$ V
13. $r = 0{,}449$ m
14. $U = 11977$ V
15. $E = \dfrac{U_0}{r \ln \dfrac{r_1}{r_2}}$
16. a) $E = 0$;
    b) $E = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 s^2 \sqrt{2}}$
17. $\vec{E} = \dfrac{U_1 - U_2}{x_{12}} e_{12} + \dfrac{U_1 - U_3}{x_{13}} e_{13} + \dfrac{U_1 - U_4}{x_1} e_{14}$
18. $U = -\dfrac{\sigma d}{2\varepsilon_0}$
19. $U = \dfrac{ed}{2A\varepsilon_0}$
20. $r_1 = r$; $r_2 \approx 1{,}02\,r$; $r_3 \approx 1{,}04\,r$; ...; $r_n = \dfrac{5{,}4 \cdot 10^6\,r}{5{,}6 \cdot 10^6 - n \cdot 10^5}$
21. $Q \approx 4{,}5 \cdot 10^5$ C; $\sigma = 8{,}88 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{Cm^{-2}}$
22. $E_1 = 1714 \cdot 10^3\,\mathrm{Vm^{-1}}$; $E_2 = 2857 \cdot 10^2\,\mathrm{Vm^{-1}}$; $U_1 = 8571$ V; $U_2 = 1429$ V
23. $U = 6$ V
24. $F = 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ N
25. $W = 50$ J
26. $W = 24$ J
27. $W = 240$ kJ
28. $W = 106$ kJ
29. $W_p = 0{,}01347$ J
30. $F' = 26\,F$
31. $C = 710\,\mu$F
32. $C = 166\,\mu$F; $r = 1495$ km
33. $U = 100$ V
34. $C = 620{,}13 \cdot 10^{-12}$ F
35. $A = 24{,}2\,\mathrm{cm^2}$
36. $C = 3335 \cdot 10^{-12}$ F
37. $C = 744$ pF
38. $C = 336{,}6$ pF
39. $U_1 = 7500$ V; $U_2 = 4500$ V
40. $W = 0{,}02$ J
41. $\Delta W = \dfrac{Q^2}{8\pi r \varepsilon_0} \times \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)$
42. $W_1 = 16{,}53 \cdot 10^{-3}$ J; $W_2 = 1{,}653 \cdot 10^{-3}$ J
43. $W = 4{,}43 \cdot 10^5\,\mathrm{J\,km^{-3}}$
44. $Q = 10$ Ah
45. $t = 1$ h 17 min 46,7 s
46. $A = 1{,}2\,\mathrm{mm^2}$
47. $l = 2{,}5$ m
48. $\varrho = 0{,}028\,\Omega\,\mathrm{mm^2\,m^{-1}}$
49. $R = 1{,}133\,\Omega$
50. $R = 57{,}3\,\Omega$
51. $m_{\mathrm{Cu}} : m_{\mathrm{Al}} \approx 2:1$
52. $A_2 = 42{,}56\,\mathrm{mm^2}$
53. $R_{30} = 22{,}23\,\Omega$
54. $R = 23{,}6\,\Omega$

55. $t = 215{,}1$ °C
56. $t_2 = 51{,}91$ °C
57. a) $\Delta R = 313\ \Omega$;
    b) $\Delta R' = 0{,}63\ \Omega$
58. $R_s = 10\ \Omega$;
    $R_p = 0{,}48\ \Omega$
59. $R = 120{,}76\ \Omega$
60. $R = 15\ \Omega$
61. $I = 9{,}5$ A
62. $U = 3{,}69$ V
63. $I = 101{,}45$ mA
64. $I = 0{,}375$ A
65. $U = 211{,}5$ V;
    $\Delta U = 8{,}5$ V
66. $R = 107\ \Omega$;
    $U_2 = 198{,}6$ V;
    $I_k = 102{,}81$ A
67. $R_x \approx 78{,}6$ kΩ
68. $U_1 = 169$ V;
    $U_2 = 51$ V
69. $I = 0{,}314$ A;
    $U = 0{,}943$ V
70. $I_1 = 1{,}5$ A;
    $I_2 = 2{,}5$ A;
    $I_3 = 4{,}0$ A
71. $I_1 = 0{,}789$ A;
    $I_2 = -1{,}278$ A;
    $I_3 = 0{,}486$ A;
    $U_3 = 1{,}944$ V
72. $I = 1$ A;
    $I_1 = 0{,}75$ A;
    $I_2 = 0{,}25$ A
73. $R_a = 29{,}99$ kΩ;
    $R_b = \frac{10}{1999}\ \Omega$
74. $R = 0{,}005\ \Omega$
75. $I = 0{,}05$ A;
    $R = 9000\ \Omega$;
    4 V/Teilstricl
76. $Q = 24$ C;
    $W = 288$ J
77. Preis: 0,24 M
78. $Q = 2570$ kcal =
    = 10,08 MJ
79. $R_1 = 0{,}6 \cdot R_2$
80. $t = 3$ h
81. $P = 717{,}6$ W
82. $R = 46{,}7\ \Omega$
83. $I = 4{,}037$ A
84. $\eta = 78{,}5$ %
85. $P = 0{,}6$ kW
86. $\eta = 92\%$;
    Preis ≈ 0,77 M
87. $I = 32{,}6$ A
88. $P = 8{,}8$ kW;
    Preis: 1,76 M
89. $P = 484$ W;
    $V = 5{,}076$ l
90. $I = 0{,}042$ A
91. Preis ≈ 0,01 M
92. je 24 in Reihe,
    2 Reihen parallel
93. $m = 2{,}83$ kg
94. $I = 10{,}16$ A
95. $I = 6$ A;
    $t = 5$ h 10 min 34 s
96. $t = 20$ h 50 min
97. $B = \frac{\mu_0 I(\pi - 1)}{2\pi r} =$
    $= 10^{-4}$ T
98. $B = 3{,}333 \cdot 10^{-6}$ T
99. $H = 16{,}75$ Am^{-1}
100. $I = 1500$ A
101. $B = 1112 \cdot 10^{-6}$ T;
     $\Phi = 6{,}672 \cdot 10^{-7}$ Vs
102. $F = 0{,}3$ N
103. $F = 1$ N
104. $B = \frac{G_1}{I} = 98{,}1$ T
105. $M = \frac{IBr^2}{2} = 0{,}01$ Nm;
     die Scheibe rotiert entgegen Uhrzeigersinn
106. $\Phi = 0{,}13$ Vs
107. $\Phi = 4 \cdot 10^{-2}$ Wb
108. $I = 2{,}575$ A
109. $I = 2{,}512$ A
110. $I = 26{,}5$ A
111. $n = \frac{U_i}{\pi B l^2} = 10^2\ \text{s}^{-1}$
112. $U_i = 1500$ V
113. $U_i = 1200$ V
114. $U_i = 660$ V
115. $U_i = \frac{\pi r^2 B_0}{t_1}$
116. $U_i = 1{,}32$ V
117. $U_i = 3{,}6$ V
118. $F = 11460$ N
119. $L = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} N^2 h \ln \frac{r_2}{r_1}$
120. $U_{max} = 18{,}85$ V
121. $\omega = 314\ \text{s}^{-1}$
122. $\cos \varphi = 0{,}843$
123. $U_{eff} = 120{,}2$ V
124. $P = 176$ W
125. $I = 9{,}29$ A
126. a) $U_f = 219{,}4$ V;
     b) $I_f = 6$ A
127. $P = 13{,}4$ kW
128. $P = 1746$ kW
129. $I_s = 105{,}2$ A
130. $U_C = 274$ V
131. $Z = 232\ \Omega$;
     $I = 0{,}47$ A;
     $U_C = 187$ V;
     $U_L = 295$ V;
     $\cos \varphi = 0{,}129$
132. $Z = 222\ \Omega$;
     $\cos \varphi = 0{,}707$;
     $\varphi = 45°$;
     $I = 0{,}99$ A;
     $U_L = 155{,}6$ V;
     $U_R = 155{,}6$ V
133. $Z = 2{,}57\ \Omega$;
     $I = 3{,}89$ A;
     $I_R = 3{,}33$ A;
     $I_C = 2$ A;
     $\tan \varphi = 0{,}6$;
     $\varphi = 31°$
134. $I = 0{,}5$ A
135. $U_{max} = 785$ V
136. $\Phi_{max} = 1{,}126 \cdot 10^{-3}$ Vs
137. $U_2 = 300$ V
138. $I = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 R} t}$

139. $I_{max} = U\sqrt{\frac{C}{L}} = 86{,}6\,A$;
$t_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC} =$
$= 1{,}36 \cdot 10^{-5}\,s$
140. $t_0 = 6{,}9\,s$
141. $E = 2{,}83\,lx$
142. $E_1 = 30\,lx$;
$E_2 = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,lx$
143. $\Phi = 0{,}05\,lm$
144. $E = 13{,}8\,lx$
145. $\frac{E}{E_0} = 1{,}12$
146. a) $\Delta\alpha_1 = 1°42'$;
$\Delta\alpha_2 = 15°51'$;
b) $\Delta\alpha_1 = 5°11'$;
der Winkel
$\varepsilon = 48°35'$ ist der Grenzwinkel
147. $\alpha = 57°30'$
148. $\varepsilon = 41°49'$
149. $x = 6{,}65\,cm$
150. $x = 18\,cm$
151. $\delta = 41°30'$
152. $\delta = 10°55'$
153. $\varphi = 45°$
154. $\psi = 2\varphi$
155. $x = 2000\,m$
156. a) $b = \frac{3}{4}r$;
b) $b = \frac{nf}{n+1}$
157. a) $g = 35\,cm$;
$b = 140\,cm$;
b) $g = 21\,cm$;
$b = -84\,cm$
158. Das Bild ist reell und umgekehrt;
$B = 4{,}5\,cm$;
$b = 96\,cm$
159. $r = 1\,m$; $x \approx 2l\varphi$
160. $x = 8\,cm$
161. a), b) $b = 30\,cm$ vom Konvexspiegel entfernt
162. $f = \frac{g}{2\omega^2}$
163. $f = 13{,}73\,cm$;
$Z = -1{,}75$
164. $g = 28\,cm$;
$b = -84\,cm$
165. $g = \frac{Z-1}{Z} \cdot \frac{1}{D}$;
$b = \frac{1-Z}{D}$
166. $b = -1{,}8\,cm$
167. $g_1 = 140\,cm$;
$g_2 = 21\,cm$;
$b_1 = 35\,cm$;
$b_2 = -84\,cm$
168. $D_2 = 3\,dpt$
169. $f_1 = 9\,cm$
170. $f = 24\,cm$
171. $G = \sqrt{B_1B_2} = 6\,cm$
172. $g \geqq f\frac{p+100}{p}$
173. $g = 5\,r$
174. $f = f' = 10{,}9\,cm$;
$h = h' = -1{,}82\,cm$;
$b = 23{,}95\,cm$
175. $f = 4{,}5\,cm$
176. $g = 7{,}14\,cm$;
$Z = 3{,}5$
177. $Z = 273{,}5$
178. $g = 4{,}05\,cm$
179. $l = 43{,}4\,cm$;
$Z = 30$
180. $d = 17{,}95\,cm$
181. $x = 18{,}6\,cm$;
$Z = 9{,}3$
182. $d \geqq 4{,}1 \cdot 10^{-5}\,cm$;
$\frac{d'}{d} = 178$
183. $\Delta f = 0{,}58\,cm$
184. $\lambda = 0{,}0006\,mm$
185. 0,78 mm; 0,44 mm
186. $\Delta s = 3{,}5\,mm$
187. $d < 101{,}25\,nm$
188. a) $\lambda = 600\,nm$;
b) $\lambda = 450\,nm$
189. a) $\lambda = 571{,}4\,nm$,
444 nm;
b) $\lambda = 666{,}6\,nm$,
500 nm, 400 nm
190. $\varphi = 6''$
191. $\Delta r = 0{,}19\,mm$
192. $f = 2\,m$;
$2r = 2{,}84\,mm$
193. $\lambda = 578\,nm$
194. 0,45 mm; 0,90 mm; 1,35 mm
195. $\lambda = 600\,nm$
196. $\lambda = 460\,nm$
197. $x = 14{,}4\,cm$
198. 4. Ordnung
199. $\alpha = 30°$
200. $\lambda = 0{,}058\,nm$
201. $\alpha = 48°26'$
202. $n = 1{,}5$
203. $\alpha = 41°38'$
204. $E = 17{,}4\,kJ$
205. $T = 200\,K$
206. $t = 1\,h\,38\,min$
207. $T = 6084\,K$
208. $E_{\lambda 1} = 1{,}17\,E_{\lambda 2}$
209. $n = 40$
210. $v = 5930\,km\,s^{-1}$
211. $y_0 = 0{,}2\,cm$
212. $r \approx 4{,}2\,mm$
213. $f = 1{,}068 \cdot 10^7\,s^{-1}$
214. $m = 11{,}384 \cdot 10^{-31}\,kg$;
$E_k = 1{,}25 \cdot 10^5\,eV$
215. $m = 1{,}8504 \cdot 10^{-27}\,kg$;
$v = 1{,}316 \cdot 10^8\,ms^{-1}$
216. $v = 0{,}96\,c$
217. $W_A = 6{,}323\,eV$
218. $m_p = 1{,}692 \cdot 10^{-27}\,kg$
219. $\lambda' = 0{,}05243\,nm$
220. $\alpha_1 = 74°15'$;
$\alpha_2 = 58°50'$;
$\alpha_3 = 43°35'$;
$\alpha_4 = 0$
221. $U_I = 5{,}12\,V$
222. $v = 1912\,km\,s^{-1}$
223. $E_k = 10^3\,eV$

224. $E = 1{,}978 \cdot 10^{-13}$ J;
$p =$
$= 6{,}624 \cdot 10^{-22}$ kgm s^{-1};
$m = 2{,}21 \cdot 10^{-30}$ kg
225. Es handelt sich um geladene Teilchen, deren Ruhmasse kleiner als $213\, m_0$ ist, z. B. μ-Mesonen, deren Ruhmasse den Wert $m_\mu =$ $= 207\, m_0$ hat.
226. $\lambda_{gr} = \frac{h}{m_0 c} \times$
$\times \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) =$
$= 0{,}0156$ nm
227. $\tau_0 = \frac{m_0}{p} l =$
$= 2{,}62 \cdot 10^{-8}$ s
228. $v_3 = 729$ km s^{-1}
229. $T_3 \approx 4{,}1 \cdot 10^{-15}$ s
230. $\lambda_1 = 656$ nm;
$\lambda_2 = 486$ nm;
$\lambda_3 = 434$ nm
231. $\lambda = 254$ nm
232. $\frac{M}{G} = \frac{\mu_0 e}{2 m_0}$
233. $N = 18$
234. $n_\alpha = 6$; $n_\beta = 4$
235. $T_{1/2} = 1550$ a
236. $p = 8{,}3\,\%$
237. $t = 60$ s
238. $Z = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ s^{-1}
239. $d_1 = 2{,}72$ cm;
$d_2 = 3{,}35$ cm
240. $\Delta t = 2{,}7$ K h^{-1}
241. $T = 2{,}7 \cdot 10^5$ a
242. $V = 0{,}67$ mm^3
243. $v = 2{,}7 \cdot 10^5$ ms^{-1}
244. $E = 14{,}94 \cdot 10^{-11}$ J $=$
$= 933$ MeV
245. $\Delta E = 2{,}26$ MeV
246. $\Delta m = 3{,}2 \cdot 10^{-9}$ g mol^{-1}
247. $m_C = 14{,}00829$ u $=$
$= 23{,}25 \cdot 10^{-27}$ kg
248. $m_O = 17{,}0047$ u
249. a) $\Delta E_N = 104{,}4$ MeV;
b) $\Delta E_{Pb} = 1467{,}9$ MeV;
ΔE pro Nukleon:
7,1 MeV
250. $E =$
$= 57 \cdot 10^{10}$ kJ kg^{-1}
251. $\lambda = 0{,}496 \cdot 10^{-9}$ m
252. $\lambda = 6{,}62 \cdot 10^{-33}$ m
253. $\lambda = 2{,}87 \cdot 10^{-11}$ m
254. $\lambda = 0{,}21 \cdot 10^{-11}$ m
255. $U_1 = 4{,}11$ V;
$U_2 = 411$ V;
$U_3 = 41\,100$ V
256. $\lambda = \frac{10^{-11}}{\sqrt{U}}$ m;
$\lambda = 10^{-14}$ m
257. $u = 4{,}80 \cdot 10^9$ ms^{-1}
258. $\lambda = 0{,}964 \cdot 10^{-10}$ m;
$\lambda = 0{,}897 \cdot 10^{-10}$ m;
$\lambda = 0{,}841 \cdot 10^{-10}$ m;
$\lambda = 0{,}796 \cdot 10^{-10}$ m;
$\lambda = 0{,}758 \cdot 10^{-10}$ m;
$\lambda = 0{,}723 \cdot 10^{-10}$ m;
$n = 1{,}047$;
$n = 1{,}042$;
$n = 1{,}037$;
$n = 1{,}035$;
$n = 1{,}031$;
$n = 1{,}028$;
$E_p = -15{,}4$ eV;
$E_p = -15{,}8$ eV;
$E_p = -15{,}8$ eV;
$E_p = -16{,}3$ eV;
$E_p = -16{,}4$ eV;
$E_p = -16{,}2$ eV;
$\overline{E_p} = -16{,}0$ eV
259. $U = 38{,}6$ V;
$\lambda = 1{,}97 \cdot 10^{-10}$ m
260. $\lambda > 0{,}242 \cdot 10^{-10}$ m;
$U < 2541$ V
261. Elektronen:
$d \geqq 7{,}28 \cdot 10^{-6}$ m;
Neutronen:
$d \geqq 3{,}97 \cdot 10^{-9}$ m;
α-Teilchen:
$d \geqq 9{,}97 \cdot 10^{-10}$ m
262. $d_\alpha = 10{,}05 \cdot 10^{-12}$ m;
$d_\beta = 1{,}23 \cdot 10^{-9}$ m
263. $\Delta q = 0{,}655 \cdot 10^{-12}$ m
264. $\frac{\Delta v_n}{v_n} = \frac{\pi}{n}$
265. $E = 3{,}58$ J;
$h\nu = 2{,}85 \cdot 10^{-19}$ J;
$\frac{E}{h\nu} = 0{,}125 \cdot 10^{20}$;
$\Delta E = 1{,}32 \cdot 10^{-25}$ J;
$p = 9{,}54 \cdot 10^{-28}$ kgms^{-1};
$\Delta p = 2{,}2 \cdot 10^{-29}$ kgms^{-1}
266. $\Delta t = 2{,}1 \cdot 10^{-8}$ s;
$\Delta E = 3{,}1 \cdot 10^{-26}$ J
267. $\Delta E = 4{,}3 \cdot 10^{-9}$ eV;
$\Delta t = 0{,}96 \cdot 10^{-6}$ s
268. $\lambda > 10^{-14}$ m;
$\nu < 3 \cdot 10^{22}$ s^{-1}
269. $m < \frac{h}{2c^2 t v} \approx$
$\approx 3{,}6 \cdot 10^{-28}$ kg $\approx$
≈ 380 u, Meson
270. $a_2 = b_{22} =$
$= 1{,}06 \cdot 10^{-10}$ m;
$b_{21} = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m
271. Linearität folgt aus Differentiationsregeln, Selbstadjungiertheit durch einmalige partielle Integration
272. $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ sind nicht HERMITEsche Operatoren, $\boldsymbol{A}$ ist zudem nicht linear; dagegen sind $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$ HERMITEsche Operatoren
273. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x\, \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + x\, \mathrm{e}^x$;
$x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^x = x\, \mathrm{e}^x$
274. $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right)^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} +$

$+\frac{d}{dx}x + x\frac{d}{dx} + x^2$;
$L\,u(x) = 2x\cos x + x^2 \sin x$

275. Wenn F und G vertauschbar sind
276. Ebenso wie die kinetische Energie und eine Ortskoordinate nicht gleichzeitig gemessen werden können, sind auch kinetische und potentielle Energie nicht zugleich meßbar. Demnach ist die Gesamtenergie nur als Ganzes meßbar; die Kenntnis der Gesamtenergie schließt mithin die gleichzeitige genaue Kenntnis der potentiellen und der kinetischen Energie aus
277. L_x ist nur mit x gleichzeitig meßbar
278. L_x ist nur mit p_x gleichzeitig meßbar. Quantenzustände, in denen L_x und x gleichzeitig gemessen werden können, gestatten es nicht, auch p_x gleichzeitig zu messen. Ebenso ist bei gleichzeitiger Meßbarkeit von L_x und p_x die Komponente x im Sinne der HEISENBERGschen Unschärferelation nicht meßbar
279. $\vec{L}^2 = -\hbar^2\left\{\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 + \left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right\}$
280. $\vec{L}^2$ ist mit allen cartesischen Komponenten des Drehimpulses gleichzeitig meßbar
281. DE-BROGLIE-Welle $\Psi = C\,e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)}$
282. $W = 0{,}061$
283. $W = 0{,}238$
284. $W = 0{,}438$
285. $C = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_1^3}}$
286. $dW = 0{,}00733$
287. $W = 0{,}0414$
288. $W = 0{,}00012$
289. $d = 0{,}68$
290. $r = 0{,}41$; $d = 0{,}59$
291. $d = 0{,}16 \cdot 10^{-5}$
292. $l = 2{,}6 \cdot 10^{-11}$ m
293. $d \approx 3 \cdot 10^{-26}$;
$n_s = \frac{h}{4mr_0^2} = 0{,}25 \cdot 10^{21}\ \mathrm{s^{-1}}$;
$\lambda \approx 0{,}75 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s^{-1}}$;
$\tau \approx 0{,}9 \cdot 10^5\ \mathrm{s} \approx 1$ Tag.
Die genaue Theorie der Radioaktivität erfordert die Untersuchung des räumlichen Potentials
294. Wegen des Faktors $\frac{W^{3/2}}{|\vec{E}|}$ beträgt die erforderliche Feldstärke nur etwa das $(2{,}5)^{3/2}$-fache gegenüber Wolfram. Es ist also die vierfache Feldstärke notwendig, d. h., sie muß in der Größenordnung $10^9\ \mathrm{Vm^{-1}}$ liegen
295. $x < 0$: $\psi = C_I\,e^{k_I n_I x}$,
$k_I n_I = \sqrt{\frac{2m(E_0 - E)}{\hbar^2}}$
$0 \leqq x \leqq a$:
$\psi = C_{II}\sin(k_{II}n_{II}x + \delta)$;
$k_{II}n_{II}$ folgt aus der transzendenten Gleichung
$\frac{\hbar k_{II}n_{II}}{\sqrt{2mE_0}} = \sin\frac{n_{II} - k_{II}n_{II}a}{2}$.
Aus den diskreten Lösungen $k_{II}n_{II}$ folgen die gesuchten Energien
$E = \frac{\hbar^2 k_{II}^2 n_{II}^2}{2m}$
$x \geqq a$: $\psi = C_{III}\,e^{k_{III}n_{III}x}$,
$k_{III}n_{III} = \sqrt{\frac{2m(E_0 - E)}{\hbar^2}}$
296. $\frac{\partial L}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} - i\hbar(LH - HL) = \frac{\partial L}{\partial t} + [H, L]$
297. $\frac{dL}{dt} = [H, AB] = [H, A]\,B + A[H, B] = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}$
298. $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} = [H, x] = \frac{p_x}{2m}$
299. $\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$; ebenso für die anderen Komponenten
300. $\lambda_{H\beta} = 4861{,}3 \cdot 10^{-10}$ m
301. $\frac{1}{\lambda} = 0{,}82258 \cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}}$
302. $\frac{1}{\lambda} = 1{,}2193 \cdot 10^6\ \mathrm{m^{-1}}$

303. $R_D = 1{,}097076 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$

304. $R_\infty = 1{,}097374 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$

305. $\lambda = 4339{,}27 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$

306. $$L_x = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\mathrm{d}\vartheta} + \cot\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$
$$L_y = -i\hbar\left(\cos\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \cot\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

307. Für die Quantenzahl $l = 1$

308. Für den Operator L_x, nicht aber für die Operatoren L_y und L_z

309. $\vec{L}^2$ und L_x

310. $$\psi_{2,1,1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{a_1}\right)^{3/2} \times \frac{zr}{a_1}\mathrm{e}^{-\frac{zr}{2a_1}}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

311. $r = 4a_1$

312. $r_1 = 9a_1;\ r_2 = 16a_1$

313. $\bar{r} = 5a_1$

314. $$\overline{\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{1}{4a_1}$$

315. $$\bar{r}_{n,l} = \frac{n^2a_1}{z}\left\{1 + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(l+1)\,l}{n^2}\right]\right\}$$

316. $\bar{r}_{\mathrm{He}} = 1{,}32 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$; $\bar{r}_{\mathrm{Li}} = 0{,}88 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$

317. $\mathrm{d}W = 0{,}019$

318. $W = 0{,}054$

319. $\mathrm{d}W = 0{,}0036$

320. Kugelsymmetrie; Wahrscheinlichkeit für alle Richtungen gleich groß

321.

m	$\psi_{l,m}\psi^*_{l,m}$
± 2	$\frac{15}{32}\sin^4\vartheta$
± 1	$\frac{15}{8\pi}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta$
0	$\frac{5}{16\pi}(3\cos^2\vartheta - 1)^2$

322.

m	max	min
± 2	90°	0°
± 1	45°	0°, 90°
0	0°, 90°	54°43′

323. $W = 0{,}192$

324. $j_r = 0;\ j_\vartheta = 0;$
$$j_\varphi = -\frac{e\hbar m}{\mu r\sin\vartheta}|\psi_{n,l,m}|^2$$

325. $j_\varphi = 0$ für $\vartheta = 0$; $j_\varphi = 0{,}84 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Am}^{-2}$ für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

326. $$M = \frac{\mu e\hbar}{2m} = 1{,}165 \times 10^{-29}\ \mathrm{Vsm}$$ (Bohrsches Magneton)

327. H_α-Linie: $h\nu = 3{,}04 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$;
Oszillation: $\hbar\omega_0 = 5{,}47 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{J}$;
Rotation: $$\frac{\hbar^2}{\mu r^2} = 4{,}02 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{J}$$

328. $\lambda_{\mathrm{os}} = 3{,}62 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}$; $\lambda_{\mathrm{rot}} = 494 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}$

329. Nach der Quantentheorie ist
$$\mathrm{d}W = w\mathrm{d}x = \frac{1}{2x_0\sqrt{\pi}} \times \left(2\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{x_0^2}}\,\mathrm{d}x,$$
dagegen nach der klassischen Theorie
$$\mathrm{d}W_{\mathrm{klass}} = w_{\mathrm{klass}}\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{\mu\omega_0}\,\mathrm{d}x}{\pi\sqrt{5\hbar - 4\mu\omega_0 x^2}};$$
für den angeführten Spezialfall ist $\mathrm{d}W = 0{,}098$, $\mathrm{d}W_{\mathrm{klass}} = 0{,}098$

330. Die Anzahl der Nullstellen ist gleich n

331. $$W = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \times \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \xi^2\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left\{\left[\frac{\xi\mathrm{e}^{-\xi^2}}{2}\right]_{\sqrt{3}}^{\infty} - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\right\} =$$
$$= 0{,}095 + \Phi(\infty) - \Phi(\sqrt{3}) = 0{,}095 + 1 - 0{,}986 = 0{,}108;$$
$\Phi(x)$: Fehlerintegral

332. $$\overline{x^2} = \frac{4x_0^2}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^{\infty}\xi^4\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi = \frac{3}{2}x_0^2;$$
für H_2: $\overline{x^2} = 2{,}34 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{m}^2$

333. $$p_{m,n} = \int\psi_m^*\left(-\frac{i\hbar\partial}{\partial x}\right) \times \psi_n\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{i}\mu\omega_0 x_{m,n}$$

334. In Übereinstimmung mit der Heisenbergschen Vertauschungsrelation ergibt sich

$$px - xp = i\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

335. In Zusammenhang mit der HEISENBERGschen Vertauschungsrelation folgt (vgl. 436)
$$E = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5 & \dots \\ & \vdots & & \end{pmatrix}$$

336. $\overline{\Delta x^2} = \frac{\hbar}{\mu\omega_0}\left(n + \frac{1}{2}\right)$;
$\overline{\Delta p_x^2} = \mu\hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)$

337. $A_{3,2} = 2860\ \mathrm{s}^{-1}$

338. $W = 0{,}343 \cdot 10^{-10}$

339. $\frac{\hbar\omega_0}{2} = 0{,}52 \cdot 10^{-33}$ J; demnach nimmt die Nullpunktenergie nur für atomare Verhältnisse bedeutsame Werte an

340. $n = 3{,}94 \cdot 10^{12}$. Infolge der kleinen Energiestufen scheint sich die Energie, verglichen mit der Gesamtenergie $\hbar\omega_0 = 1{,}05 \cdot 10^{-33}$ J, stetig zu verändern

341. $J = 1{,}65 \cdot 10^{-46}$ kgm²; $r = 1{,}15 \cdot 10^{-10}$ m; $\frac{\hbar^2}{J} = 0{,}667 \cdot 10^{-22}$ J

342. $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 7{,}5\ \mathrm{m}^{-1}$; $\lambda > 13{,}3 \cdot 10^{-6}$ m; infraroter Bereich

343. Oszillationsschwingung mit $\lambda = 30{,}8 \cdot 10^{-6}$ m; Abstand der Rotationslinien $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 16{,}3\ \mathrm{m}^{-1}$; im Zentrum ist $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 33{,}0\ \mathrm{m}^{-1}$; Auflösungsvermögen > 1960, im Zentrum > 980

344. $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \gtrapprox 180$, im Zentrum $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \gtrapprox 115$

345. $J = 1{,}39 \cdot 10^{-46}$ kgm²; $r = 1{,}09 \cdot 10^{-10}$ m

346. $(\xi + i\eta)_{l,m;l',m\pm 1} \neq 0$; $\zeta_{l,m;l',m\pm 1} = 0$; $(\xi + i\eta)_{l,m;l',m} = 0$; $\zeta_{l,m;l',m} \neq 0$. Für alle anderen Indizes sind die Matrixelemente Null. Daraus ist zu folgern, daß Emission nur für $\Delta m = 0, \pm 1$ stattfindet, wobei $\Delta m = \pm 1$ rechts- bzw. linkszirkular polarisierte Strahlung liefert (σ-Komponente), dagegen liefert $\Delta m = 0$ die linear polarisierte Strahlung der π-Komponente. Diesen Regeln kommt nur dann eine Bedeutung zu, wenn die ζ-Achse physikalisch ausgezeichnet ist. Das geschieht im Falle des ZEEMAN-Effekts durch Aufspaltung der Spektrallinien in einem äußeren Magnetfeld

347. $l' = 0{,}995$ m; Verkürzung $l - l' = 0{,}005$ m

348. $v = 0{,}866$ c

349. $v = 0{,}6\,c$

350. a) $\lambda = 6497{,}46 \times 10^{-10}$ m;
b) $\lambda = 6628{,}71 \times 10^{-10}$ m;
c) $\lambda = 6563{,}09 \times 10^{-10}$ m

351. a) $v = 1{,}8\,c$;
b) $v = 0{,}9944\,c$

352. $v = 0{,}9997\,c$

353. $q_x' = -0{,}312\,c$; $q_y' = 0{,}191\,c$; $q_z' = -0{,}0955\,c$

354. $$|\vec{v}_{\mathrm{rel}}| = \frac{\sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{[\vec{v}_1 \times \vec{v}_2]^2}{c^2}}}{1 - \frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}} = 0{,}378\,c$$

355. $E = (m - m_0)\,c^2 = 4{,}986 \cdot 10^{-13}$ J

356. $m = 1{,}02\,m_0 = 9{,}29 \cdot 10^{-31}$ kg

357. Aus dem Induktionsgesetz
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 2\pi \int_0^{r_0} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} r\,\mathrm{d}r = -2\pi r_0 \vec{E}$$
folgt für die beschleunigende Kraft
$$-e\vec{E} = \frac{e}{2\pi r_0}\frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

Hieraus erhält man weiter

$$mv = \frac{e}{2\pi r_0} |\vec{\Phi}| = $$
$$= 24{,}8\, m_0 c;$$
$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{24{,}8}\right)^2}} c =$$
$$= \left|1 - \frac{1}{1230}\right| c;$$
$$m = 24{,}8\, m_0 =$$
$$= 2{,}26 \cdot 10^{-29}\ \text{kg};$$
$$eU = (m - m_0)\, c^2 =$$
$$= 1{,}218 \cdot 10^7\ \text{eV}$$

358. $\Delta t' = 203{,}87\,(1 + 1{,}85 \cdot 10^{-12})$ s;
$\Delta t' - \Delta t = 3{,}77 \times 10^{-10}$ s

359. $\Delta t' = 101{,}94\,(1 + 1{,}85 \cdot 10^{-12})$ s;
$\Delta t' - \Delta t = 1{,}88 \times 10^{-10}$ s

360. $\Delta\lambda = 7{,}15 \cdot 10^{-19}$ m;
$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1{,}09 \cdot 10^{-12}$;
$v = 3{,}27 \cdot 10^{-4}\ \text{ms}^{-1}$;
Rotverschiebung

361. $\Delta\lambda = 1{,}38 \cdot 10^{-12}$ m;
$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2{,}11 \cdot 10^{-6}$;
Rotverschiebung

362. $\Delta\lambda = -4{,}22 \cdot 10^{-11}$ m;
$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -6{,}43 \cdot 10^{-5}$;
Blauverschiebung.
Das Licht des Siriusbegleiters eignet sich hiernach wesentlich besser für einen Nachweis der relativistischen Verschiebung als das Licht der Sonne

363. $\Delta\lambda = -4{,}56 \cdot 10^{-16}$ m;
$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -6{,}94 \cdot 10^{-10}$;
Blauverschiebung

364. $\frac{\Delta v}{v} = -1; \quad v = c$

Tabellenanhang

Tabelle 1: **Wichtige physikalische Konstanten**

Mittlere Fallbeschleunigung	g_n	$= 9{,}80665 \text{ m s}^{-2}$
Näherungswert	g	$= 9{,}81 \text{ m s}^{-2}$
Gravitationskonstante	γ	$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Allgemeine Gaskonstante	R	$= 8{,}314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} =$
		$= 0{,}082051 \text{ l atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1} =$
		$= 1{,}986 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
AVOGADROsche Konstante	N_A	$= 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molvolumen	V_0	$= 22{,}414 \text{ l}$
BOLTZMANN-Konstante	k	$= R/N = 1{,}3806 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Mechanisches Wärmeäquivalent	J	$= 4{,}186 \text{ J cal}^{-1}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$= 8{,}854 \cdot 10^{-12} \text{ As V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$= 1{,}257 \cdot 10^{-6} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1}$
FARADAY-Konstante	F	$= 96485 \text{ As mol}^{-1}$
Vakuumlichtgeschwindigkeit	c	$= 2{,}99792 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
PLANCKsches Wirkungsquantum	h	$= 6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
STEFAN-BOLTZMANN-Konstante	σ	$= 5{,}67 \cdot 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$
Konstante im WIENschen Verschiebungsgesetz	b	$= 0{,}00289 \text{ m K}$
Elementarladung des Elektrons	e_0	$= -1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
Ruhmasse des Elektrons	m_0	$= 9{,}109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 5{,}498 \cdot 10^{-4} \text{ u}$
Ruhmasse des Protons	m_p	$= 1{,}6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1{,}00758 \text{ u}$
Ruhmasse des Neutrons	m_n	$= 1{,}6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1{,}00895 \text{ u}$
Ruhmasse des α-Teilchens	m_α	$= 6{,}6428 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 4{,}002763 \text{ u}$
Ruhmasse des Deuterons	m_d	$= 3{,}342 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 2{,}014172 \text{ u}$
Masse des H-Atoms	m_H	$= 1{,}6734 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1{,}008128 \text{ u}$
BOHRsches Magneton	μ_B	$= 1{,}165 \cdot 10^{-29} \text{ J m A}^{-1}$
RYDBERG-Zahl	R	$= 10973732 \text{ m}^{-1}$
Atomare Masseeinheit	1 u	$= 1{,}66053 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Energieäquivalent der atomaren Masseeinheit	ΔE_{1u}	$= 931{,}8 \text{ MeV}$

Tabelle 2: **Bezeichnungen und Einheiten der verwendeten physikalischen Größen**

Größe	Bezeichnung der Größe	Einheit im Internat. System	Kurzzeichen der Einheit
Länge, Wegstrecke	l, s	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Fläche	A		m^2
Volumen	V		m^3
Dichte	ϱ		$kg\,m^{-3}$
Spezifisches Volumen	v		$m^3\,kg^{-1}$
Geschwindigkeit	v, c		$m\,s^{-1}$
Beschleunigung	a, g		$m\,s^{-2}$
Winkelgeschwindigkeit	ω		s^{-1}
Winkelbeschleunigung	α		s^{-2}
Frequenz	f, ν		s^{-1}
Periodendauer	T		s
Kraft, Gewichtskraft	F, G	Newton	$N = kg\,m\,s^{-2}$
Druck	p	Pascal	$Pa = N\,m^{-2}$
Arbeit, Energie	W, E	Joule	$J = kg\,m^2\,s^{-2}$, Nm
Leistung	P	Watt	$W = J\,s^{-1}$
Impuls, Bewegungsgröße	p		Ns
Drehmoment	M		J, Nm
Massenträgheitsmoment	J		kgm^2
Drehimpuls	L		$kgm^2\,s^{-1}$
Zugelastizitätsmodul	E		$N\,m^{-2}$
Schubelastizitätsmodul	G		$N\,m^{-2}$
Oberflächenspannung	σ		$N\,m^{-1}$, $J\,m^{-2}$
Viskosität	η		$kg\,m^{-1}\,s^{-1}$
Grammolekül	M		$kg\,mol^{-1}$
Temperatur	T, t	Kelvin	K, °C
Wärmemenge	Q	Joule	J, kJ
Spezifische Wärmekapazität	c, c_p, c_v		$J\,kg^{-1}\,K^{-1}$
Molwärme	C, C_p, C_v		$J\,K^{-1}\,mol^{-1}$
Umwandlungswärme	l		$J\,kg^{-1}$
Innere Energie	U		J
Enthalpie	H		J
Entropie	S		$J\,K^{-1}$
Freie Energie	F		J
Potentielle thermodynamische Energie	G		J
Osmotischer Druck	π		$N\,m^{-2}$
Wärmeleitfähigkeit	λ		$J\,m^{-1}\,s^{-1}\,K^{-1}$

Größe	Bezeichnung der Größe	Einheit im Internat. System	Kurzzeichen der Einheit
Wärmeübergangszahl	α		$\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}\,K^{-1}}$
Elektrische Ladung	Q, q, e	Coulomb	$\mathrm{C = As}$
Elektrische Feldstärke	E		$\mathrm{V\,m^{-1}}$
Ladungsdichte			
der Fläche	σ		$\mathrm{C\,m^{-2}}$
des Volumens	ϱ		$\mathrm{C\,m^{-3}}$
Elektrisches Potential	φ	Volt	$\mathrm{V = J\,A^{-1}\,s^{-1}}$
Elektrischer Kraftfluß	Ψ		Vm
Dielektrische Verschiebung	D		$\mathrm{As\,m^{-2}}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0		$\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}}$
Dielektrizitätszahl	ε_r		
Dielektrizitätskonstante	$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$		$\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}}$
Kapazität	C	Farad	$\mathrm{F = As\,V^{-1}}$
Energiedichte im			
elektrischen Feld	ϱ_E		$\mathrm{J\,m^{-3}}$
Elektrische Stromstärke	I	Ampere	A
Potentialdifferenz	U, φ		V
Stromdichte	J		$\mathrm{A\,m^{-2}}$
Elektrischer Widerstand	R	Ohm	$\Omega = \mathrm{V\,A^{-1}}$
Spezifischer Widerstand	ϱ		$\Omega\,\mathrm{m}$
Spezifische Leitfähigkeit	$\varkappa$		$\Omega^{-1}\,\mathrm{m^{-1}}$
Temperaturkoeffizient des			
elektrischen Widerstands	α		$\mathrm{K^{-1}}$
Elektromotorische Kraft	E		V
Elektrochemisches Äquivalent	$\ddot{A}$		$\mathrm{kg\,A^{-1}\,s^{-1}}$
Magnetischer Induktionsfluß	Φ	Weber	$\mathrm{Wb = Vs}$
Magnetische Induktion	B	Tesla	$\mathrm{T = Vs\,m^{-2} = Wb\,m^{-2}}$
Magnetische Feldstärke	H		$\mathrm{A\,m^{-1}}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0		$\mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}}$
Permeabilitätszahl	μ_r		
Permeabilität	$\mu = \mu_0\mu_r$		$\mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}}$
Magnetischer Widerstand	R_m		$\mathrm{A\,Wb^{-1}}$
Induktivität	L	Henry	$\mathrm{H = Vs\,A^{-1}}$
Lichtstrom	Φ	Lumen	lm
Lichtstärke	I	Candela	cd
Beleuchtungsstärke	E	Lux	lx
Brennweite	f		m
Brechkraft	D	Dioptrie	$\mathrm{dpt = m^{-1}}$
Brechzahl	n		
Halbwertzeit	$T_{1/2}$		s
Zerfallskonstante	λ		$\mathrm{s^{-1}}$

Tabelle 3: **Dielektrizitätszahlen ε_r**

Äthylalkohol	26,0	Glas	7,0
Paraffin	2,0	Glimmer	7,0
Petroleum	2,0	Wasser	81,0
Porzellan	6,0	Luft (bei normalem Druck)	1,0006

Tabelle 4: **Spezifischer Widerstand ($10^6 \varrho$) und Temperaturwiderstandszahl ($10^3 \alpha$) einiger Stoffe**

bei 0 °C	Ω m		K^{-1}
Aluminium	0,029	Aluminium	4,2
Kupfer	0,017	Kupfer	3,92
Messing	0,08	Messing	1,5
Blei	0,21	Blei	4,2
Quecksilber	0,958	Quecksilber	0,99
Nickel	0,07	Nickel	6,7
Platin	0,107	Platin	3,9
Zink	0,06	Zink	4,2
Eisen (Stahl)	0,12	Eisen (Stahl)	6,0
Kohlenstoff	40,0	Kohlenstoff	−8,0

Tabelle 5: **Elektrochemisches Äquivalent $\ddot{A}$ in g A^{-1} s^{-1}**

Kupfer	$328 \cdot 10^{-6}$
Silber	$1118 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 6: **Mittlere Brechzahlen n für das sichtbare Spektrum**

Glas	1,52	Wasser	1,33

Die deutliche Sehweite ist $l = 0{,}25$ m.

Tabelle 7: **Halbwertzeiten $T_{1/2}$ radioaktiver Kerne**

Aktinium	13,5 Jahre
Radium	1590,0 Jahre
Radon	3,825 Tage
Uran (Isotop ^{238}U)	$4{,}4 \cdot 10^9$ Jahre
Kobalt (Isotop ^{60}Co)	5,2 Jahre
Chlor (Isotop ^{38}Cl)	38,5 Minuten
Phosphor (Isotop ^{32}P)	14,3 Tage
Strontium (Isotop ^{90}Sr)	30 Jahre
Natrium (Isotop ^{42}Na)	14,8 Stunden
Kohlenstoff (Isotop ^{14}C)	5700 Jahre

Tabelle 8: **Tabelle der chemischen Elemente**

(nach ihren chemischen Zeichen alphabetisch geordnet)

chem. Zeichen	Element	Ordnungszahl	relative Atommasse
Ac	Aktinium	89	227,05
Ag	Silber	47	107,87
Al	Aluminium	13	26,98
Am	Amerizium	95	243
Ar	Argon	18	39,948
As	Arsen	33	74,92
At	Astatin	85	210
Au	Gold	79	196,97
B	Bor	5	10,81
Ba	Barium	56	137,34
Be	Beryllium	4	9,012
Bi	Wismut	83	208,98
Bk	Berkelium	97	245
Br	Brom	35	79,904
C	Kohlenstoff	6	12,011
Ca	Kalziumm	20	40,08
Cd	Kadmiu	48	112,40
Ce	Zer	58	140,12
Cf	Kalifornium	98	246
Cl	Chlor	17	35,453
Cm	Curium	96	243
Co	Kobalt	27	58,93
Cr	Chrom	24	51,996
Cs	Zäsium	55	132,91
Cu	Kupfer	29	63,546
Dy	Dysprosium	66	162,50
Er	Erbium	68	167,26
Es	Einsteinium	99	254*
Eu	Europium	63	151,96
F	Fluor	9	19,00
Fe	Eisen	26	55,85
Fm	Fermium	100	253*
Fr	Franzium	87	223
Ga	Gallium	31	69,72
Gd	Gadolinium	64	157,25
Ge	Germanium	32	72,59
H	Wasserstoff	1	1,008
He	Helium	2	4,003
Hf	Hafnium	72	178,5
Hg	Quecksilber	80	200,59
Ho	Holmium	67	164,93
In	Indium	49	114,82
Ir	Iridium	77	192,2
J	Jod	53	126,904
K	Kalium	19	39,10
Kr	Krypton	36	83,80
Ku	Kurtschatovium	104	264
La	Lanthan	57	138,91
Li	Lithium	3	6,941
Lr	Lawrenzium	103	257*
Lu	Lutetium	71	174,97
Md	Mendelevium	101	256*
Mg	Magnesium	12	24,305
Mn	Mangan	25	54,938
Mo	Molybdän	42	95,94
N	Stickstoff	7	14,0067
Na	Natrium	11	22,9898
Nb	Niob(ium)	41	92,906
Nd	Neodym	60	144,24
Ne	Neon	10	20,179
Ni	Nickel	28	58,71
No	Nobelium	102	254*
Np	Neptunium	93	237
O	Sauerstoff	8	15,9994
Os	Osmium	76	190,2
P	Phosphor	15	30,9738
Pa	Protaktinium	91	231
Pb	Blei	82	207,2
Pd	Palladium	46	106,4
Pm	Promethium	61	145
Po	Polonium	84	210,0
Pr	Praesodym	59	140,908
Pt	Platin	78	195,09
Pu	Plutonium	94	242
Ra	Radium	88	226,05
Rb	Rubidium	37	85,47

Tabelle 8: Fortsetzung

chem. Zeichen	Element	Ordnungszahl	relative Atommasse	chem. Zeichen	Element	Ordnungszahl	relative Atommasse
Re	Rhenium	75	186,2	Tc	Technetium	43	98,913
Rh	Rhodium	45	102,905	Te	Tellur	52	127,60
Rn	Radon	86	222	Th	Thorium	90	232,038
Ru	Ruthenium	44	101,07	Ti	Titan	22	47,90
S	Schwefel	16	32,064	Tl	Thallium	81	204,37
Sb	Antimon	51	121,75	Tm	Thulium	69	168,934
Sc	Skandium	21	44,959	U	Uran	92	238,03
Se	Selen	34	78,96	V	Vanadin	23	50,941
Si	Silizium	14	28,086	W	Wolfram	74	183,85
Sm	Samarium	62	150,4	Xe	Xenon	54	131,3
Sn	Zinn	50	118,69	Y	Yttrium	39	88,905
Sr	Strontium	38	87,62	Yb	Ytterbium	70	173,04
Ta	Tantal	73	180,948	Zn	Zink	30	65,37
Tb	Terbium	65	158,925	Zr	Zirkonium	40	91,22

*) Bei den so bezeichneten Atommassen handelt es sich jeweils um die Kernmassenzahl des stabilen Isotops

Tabelle 9: **Wellenlängen λ der Balmerserie des Wasserstoffatoms ($n_e = 2$)**

n_a	gemessen in Luft	berechnet für Luft	berechnet für Vakuum
	$\cdot 10^{-10}$ m	$\cdot 10^{-10}$ m	$\cdot 10^{-10}$ m
3	6562,80	6562,76	6564,68
4	4861,33	4861,31	4862,73
5	4340,47	4340,45	4341,72
6	4101,74	4101,73	4102,93
7	3970,07	3970,07	3971,23
8	3889,05	3889,05	3890,18

Tabelle 10: **Erste Linie und Seriengrenze der verschiedenen Spektralserien des Wasserstoffatoms im Vakuum**

Name der Serie	n_e	erste Linie $\cdot 10^{-10}$ m	Seriengrenze $\cdot 10^{-10}$ m
LYMAN-Serie	1	1215,68	911,76
BALMER-Serie	2	6564,68	3647,05
PASCHEN-Serie	3	18756,24	8205,85
BRACKETT-Serie	4	40522,74	14588,18
PFUND-Serie	5	74598,67	22794,04

Tabelle 11: **Mittlere Gitterpotentiale E_p verschiedener Metalle in eV**

Ag	Al	Cu	Fe	Ni	Zn
−14	−17	−13,5	−14	−16	−16

Tabelle 12: **Austrittsarbeit A verschiedener Metalle in eV bei kalter Emission**

Ag	K	Na	Ni	Pt	W
5,6	2,1	3,2	11,7	6,0	5,7

Tabelle 13: **Massenveränderlichkeit des Elektrons bei Energieaufnahme im elektrischen Feld**

Energie in eV	Massenverhältnis m/m_0	Masse $m \cdot 10^{-31}$ kg
10^3	1,002	9,13
10^4	1,020	9,29
10^5	1,195	10,89
10^6	2,95	26,91
10^7	20,5	187,08
10^8	196,3	1788,84
10^9	1953,6	17795,3

Sachwortverzeichnis

Wenn Sie eine naturwissenschaftliche oder technische Fachrichtung studieren, werden Sie ständig mit Aufgaben konfrontiert, für die Sie Lösungen finden sollen. Die Fähigkeit, Probleme physikalisch-technischer Art zu erkennen und zu lösen, erwerben Sie aber nicht durch Besuch einer Vorlesung und können Sie auch nur in beschränktem Umfange aus dem Lehrbuch erlernen – es kommt vor allem auf intensives, ständiges *Üben* an. Ein Hilfsmittel für derartige Übungen will dieses Buch sein; es versucht, eine Brücke zwischen der Theorie des Lehrgebietes und der Praxis des Aufgabenrechnens zu schlagen. In ihm sind 617 Beispiele und Aufgaben zu den Gebieten *elektrische und magnetische Vorgänge, Optik, Atomphysik, Quanten- und Relativitätstheorie* enthalten. Etwa 40% davon werden als Beispiele ausführlich durchgerechnet, während Sie zu den übrigen Aufgaben die Ergebnisse am Schluß des Buches nachschlagen können. Jedem Abschnitt ist ein kurzer Lehrtext vorangestellt, in dem die wichtigsten Begriffe, Definitionen und Gesetze des betreffenden Gebietes zusammengefaßt werden. Damit ist Ihnen die Möglichkeit gegeben, sich den im Unterricht angeeigneten Stoff ins Gedächtnis zurückzurufen, ohne daß Sie erst in anderen Büchern suchen müssen. Für die *Beispiele* wurden nach Möglichkeit solche Themen gewählt, die nicht nur die physikalische Idee oder einen geschickten Lösungsweg demonstrieren, sondern auch für Sie als Wissenschaftler oder Techniker von praktischer Bedeutung sind.
Das Werk wurde von sechs Dozenten am Lehrstuhl für Physik der Universität Košice unter Leitung von Prof. Dr. rer. nat. *Vladimir Hajko* verfaßt und ist nicht nur in der ČSSR sehr gefragt. – Die Beiträge zur Quanten- und Relativitätstheorie schrieb Prof. Dr. rer. nat. habil. *Heinz Schilling*, Berlin-Adlershof.